

**THE BOOK WAS  
DRENCHED**

UNIVERSAL  
LIBRARY

**OU\_191139**

UNIVERSAL  
LIBRARY







حساب التفاضل والتكامل  
ترجمة الفقير محمود بن احمد مدرس العلوم  
الفلكية بمدرسة المهندسمخانة  
الهند يومية الكائنات يولاق  
مصر المحمية



(بسم الله الرحمن الرحيم)

نحمدك اللهم على تفضلك بتفاضل النسب والانساب \* وتكرمك بتكامل  
 ما رزقته بغير حساب \* ونصلي ونسلم على نبيك الذي جاء بالذوالقواطع \*  
 وبلغت النهاية الكبرى \* مجزاته السواضع \* هندوس انبياء الامم الخالية \*  
 ومهندس مجارى بحر الشريعة بالهندسة العالیه \* من أقام بما ارشدنا اليه  
 من اساس معرفتك الحدوث \* ورسم جيموب ظل كرمك النليل الممدود \* صلى  
 الله وسلم عليه وعلى آله الواصلين الى طريق النهايات \* واصحابه البالغين في كليات  
 المعادلات اقصى الغايات \* وبعد فيقول الفقير محمود بن احمد مدرس العلوم  
 الهندسية \* في مدرسة دار الهندسة الدائرية الملكية \* الكائنة بيولاقي مصر  
 المحروسة \* شرف الله عن اسكاره الدهر وبؤوسه \* ان مكارم الحضرة الاصفية  
 الخديوية \* والدولة المحمدية العلوية \* قد تدفق ببحر احسانها المديد الكامل  
 وعم الديار المصرية بفيضه العميم الشامل \* فرد على مملكتها ضالتها \* واعاد اليها

بمبها على غير هادئها • بإنشاء ما أبدع من الآثار الحسنة الجميلة • والماتر  
 الجلية الجلية • التي لا تحصر ولا تحصى • ولا تستقرى ولا تستقصى • مع  
 تجديد مدارس من معالم العلوم والفنون • وإظهار ما خفي من سرها المصون  
 المكتنون • حيث أوجد هافيا بأسرها • وأحيانا بحسرها ونشرها • بعد أن  
 بحيث آثارها مددا مديده • وعفت رسومها أزمنة عديده • حتى ألبسها حلة  
 الكمال • وأفرغها في قالب الحسن والجمال • فكانت سبيكة ابريز • وما ذلك  
 على العزيز عزيز • ولما كان العلم الرياضي من أحسن تلك العلوم وأبهاها •  
 وأبهج هاتيك الفنون وأزهاها • وكنت منذ دخلت هذه المدرسة وأنا في  
 في عداد التلامذة • ما فتئت أنعلم حتى صرت فيها من الأساتذة • وقت بوظيفة  
 التدريس مدة سنين • مستظلا بظل الاحسان والله يحب المحسنين • تعاملت  
 مع الطلبة احسن التعامل • وأقرأتهم كتاب الموسيقى بوشارلا في حساب  
 التفاضل والتكامل • وحيث اني لوحظت بأعين العناية • ويسرلى الله سبيل  
 الهداية • بادرت الى عبارته الفرنسية بالترجمة والتعريب • ونظمها في سلك  
 براعة التسهيل والتقريب • حيث بسطت بعض العبارات • ووضحتها زيادة على  
 ما في الاصل من الاشارات • وجعلتها على طرف التمام للمجتدى • لتتناولها  
 يد الطالب المبتدى • ونزعتها عن العجز والجبر • ومثلتها طبعاً بمطبعة الحجر  
 ثم اني ضمنت اليها درر فوائده • تعدت في سمطها فرائده • يكثر نفعها في علم الميكانيك  
 وغيره • مما يلوح وجه ثمرته وخيره • والحقت بها نبذة في علم الضوء جليلة  
 الشأن • قد ألفها جناب ناظر مدرستنا الآن • وهو حضرة لامبيريك صاحب  
 البراعة • المحرز لقصبة السبق في ميادين البراعة • ولما كانت تلك الترجمة كتاباً  
 عظيماً • وصارت بهاتين الصفتين عقد انظما • وكان الجناب العالي • ذوالهمم  
 والمعالى • من هو الفرد الجامع بين المعارف والعوارف • والتالد من المجد  
 والطارف • العارف بأفنان الفنون منطوقاً ومفهوماً • امير اللوآء ادهم بيك  
 مدير المدارس عموماً • قد شرفها باطلاعه الشريف عليها • واسعدنا بنظره  
 السعيد اليها • صدر امره الكريم بطبعها • ارادة لتكثير ثمرتها ونفعها • حيث

انس منهارشدها \* وعلم انها قد بلغت اشدها \* فدونهاها ايها الطالب \* يسر الله  
لى ولك كل المطالب \* امين اللهم امين \* يارب العالمين  
\* (مقدمه) \*

قال المؤلف ان من نظرى تاريخ المعارف وجد فيه ان القريحة البشرية تقف  
اوقاتا بعد ان ترتقى الى أعلى الادراكات والاختراعات كأن مانعا يمنعها من  
ارتقاها ثم تعود وترتقى ثانيا بقوة اخرى فتظهر باستكشاف عظيم من  
الاستكشافات التى تتغير بها صورة العلم بالكلية \* وان من هذا القبيل ما اخترعه  
المعلم ديكارته اوديكارنوس من تطبيق الجبر على الهندسة فانه افتح بذلك  
طريقا كانت مجهولة لاسلافه من العلماء \* ومنه ايضا ما اغرب به المعلم نوطون  
والمعلم لبتز على علماء بلاد اوربا من اختراع تحليل اخر اعلى درجة من  
هندسة المعلم ديكارته اذ لا يتيسر استكشاف اخر يكون به تشرىف العقل  
البشرى مثله حيث صار الانهائى الذى هو مجرد تخيل مستطيعا للحساب  
فنتجت منه الاعاجيب وقدر ادبعض من الفلاسفة ان يوقعوا التشكك فى صحة  
هذا التحليل العجيب فلم يبلغوا ذلك ولم يتيسر لهم ان ينكروا نتائجها ولم يترتب  
على ذلك الا زيادة حث علماء الهندسة على زيادة بذل الجهد فى البحث عن  
حقيقة الوجود الفكرى للحسابات الجديدة وكان اول من علم هذا السر هو المعلم  
نوطون حيث جعل حساب التفاضل طريقة للوصول الى اول نسب الكميات  
واخرها اعنى جعلها طريقة للوصول الى نهايات النسب ثم جاء المعلم دلبير  
فراى ان تصورات المعلم نوطون مشتهة على حقيقة الوجود الفكري  
لحساب التفاضل واثبت انه يتيسر بواسطة طريقة النهايات ان يحصل التوضيح  
الكافى للطريقة الموجودة عند الانكليز بقطع النظر عن التحرك الذى هو معنى  
لا تعلق له بحساب التفاضل وقد تكلم فوج من علماء الهندسة قبل المعلم دلبير  
فى مؤلفاتهم على طريقة النهايات منهم المعلم كوزان خصوصا ولكن لم يحصل  
الاتضاح التام وازالة الشك بالكلية عن الوجود الفكرى لطريقة الصغيرات جدا  
التي هى عبارة عن اختصار طريقة النهايات الامند حصل اثباتها بواسطة نظرية

## المعلم تبلور

وبالنظر الى هذا المعنى ليست طريقة الصغيرات جدًّا الا عبارة عن طريقة مستقرية لايجاد تفاضلات الدوال المتنوعة وبها تنطبع تلك التفاضلات في الازهان بواسطة اشكال هندسية في غاية البساطة والاختصار تظهر للعقل على وجه اوضح من التصورات المطلقة التخيلية وبالجملة فهذه الطريقة تصير ضرورية لا بد منها ولا غنى عنها في الفروع العالية من علم الميكانيك والفلك اذ بدونها يكون حل المسائل العملية من المشكلات الصعبة في اغلب الاحيان ومن ثم كان افاضل علماء الهندسة يستعملونها كثيرًا في مؤلفاتهم

وقد كان فيما سلف من الزمان لهذه الطريقة ولو في الوجود الفكرى محامون قد بذلوا الجهد في الذب عنها وذلك لما انه اذا التزم الانسان السلوك فيها على مقتضى بعض دعاوى مخصوصة تظهر عليها علامة الصحة والضبط الرياضى التام ويترأى عليها انها ناتجة بالطبع عن اصل عام وقاعدة كلية ترجع اليها وهذه القاعدة المذكورة لم تزل الى الآن معتبرة من الضروريات لكن لما رأيت اننا اذا اعتبرنا اللانهاى بالوجه المقرر فيها نجد انه ينتج عنها نتائج لا يمكن قبولها استحسن ان ابرهن عليها اجاعا لطريقة الصغيرات جدًّا اصلا آخر هو مبنى كذلك على ما علم لنا من الفوائد المتعلقة باللانهاى اذ هو اقرب الى الصواب بسبب تصور النهايات التى توجد فيه ضمنا

واذا كانت طريقة النهايات ممتمة لطريقة الصغيرات جدًّا بسبب ما يوجد فيها من الخلل فان طريقة المعلم لاجرائه ممتمة كذلك لطريقة النهايات وذلك بربط المعاملات التفاضلية بالجبر المحض ولا بأس يجعل هذه الطرائق الاربع كأنها طريقة واحدة ولذلك اذا قابلتها ترى ان الاصول الناتجة عنها مشتركة بين جميعها وان من اراد فهمها كلها ليس عليه الا ان يضم شيئاً قليلا الى طريقة النهايات فقط وقول طريقة المعلم لاجرائه حينئذ الى ان تكون عبارة عن نظرية صارت سهلة جدًّا حيث غيرت طريقة اثباتها

ولم التزم توضيح النظريات المتنوعة التى تتركب منها هذه الرسالة وانما التزمت

توضيح سائر العمليات كما سلكت هذا المسلك في سائر مؤلفاتي الرياضية لما اني متحقق ان تركها لا يترتب عليه زيادة الاعتقاد في كثرة معارف المؤلف وان المؤلف انما يعرف مقامه بما يديه من كيفية الدلالة على تصوراته وبما يقرره من الملاحظات المختصرة في مؤلفاته

ولنضم الى ما قترناه انه اذا التزم عدم ترك التصورات المتخالفة في صلب النظريات لا يمكن اجتناب التطويل المحل بها الا بواسطة الضبط والتحرير ويزيد الامر اشكالا اذا كان بعض الكتاب معذرا للبرهنة على المسائل وابداء اسبابها ومن اطلع على كثرة المواد المتنوعة المقررة في هذا الكتاب عرف حق المعرفة ما يصدر لي من الموانع في تأليقي له ومن الزيادات التي نسمتها الى هذا الكتاب في هذه الطبعة الجديدة مسألة النقط الغريبة والنهايات الكبرى والصغرى للدوال ذات المتغيرتين والمنحنيات القطبية ونظرية المتغيرة المستقلة او التي ليست بمعلقة والحلول الخصوصية للمعادلات التفاضلية وتكميب الاجسام المنتهية بالسطوح المنحنية وتربيع السطوح المذكورة وشروط تكامل الدوال ذات الثلاث متغيرات والمعادلات التفاضلية بدرجة ثانية والمعادلات المتماثلة وغير ذلك وبالجمله فقد ختمت هذا المؤلف بقضية تتعلق بالمعادلات التفاضلية الجزئية مع بعض ملحوظات عمومية على الدوال الاختيارية تتم بها تكاملات تلك المعادلات وبهذا توصلت الى شرح الطريقة التي تتعين بها الدالة الاختيارية التي تدخل في المعادلة عند توفر معادلات الشرط واعلامها

والطريقة التي بحثت بها عن تلك المسألة المهمة معتبرا السطوح المنحنية تشابه الطريقة التي استعملتها باعتبار الثوابت الاختيارية ولذا بينت بواسطة المنحنيات كيف توجد الثابتة بعينها للتكامل بعد ان حذفت تلك الثابتة عند اخذ التفاضل وهي مسألة يظهر لي انه لم يحظ بها احد قبلي

## حساب التفاضل

### تفاضل الكميات الجبرية

١ • حساب التفاضل يبحث فيه عن النتائج التي تنشأ عن الكميات اذا اخذ بعض متغيراتها زيادةً ما ولتغير ما صح تغيره في المعادلة كما ان الثابت ماثت على حالة غير متغيرة بطول العملية معلوماً كان او مجهولاً ويقال للمتغير دالة للمتغير اخر متى ساوى الاول كمية حساسية يدخل فيها الثاني بارتباط اياها كان فان  $v$  في معادلات

$$v = 2x - z^2 \text{ و } v = s^2 - 3b \text{ بـ } s$$

$$\text{و } v = ds^2 \text{ و } v = b + ds^2 \text{ هي دالة } s$$

٢ • ولنعبر دالة في حالة ازديادها بازدياد المتغير الشاملة هي  $v$  فان كل

دالة للمتغير  $s$  يمكن بيانها برأسى  $s$  منحني  $s-m$  (شكل ١) وليكن

لاجل ذلك  $ac = s$  و  $cm = v$  ونفرض ان الافقي  $ac$

ياخذ زيادة  $cc' = h$  فالراسى  $cm$  يصير عند ذلك  $cm' = v'$

ولاجل ايجاد مقدار هذا الراسى الجديد يشاهد انه يلزم تغير  $v$  بكمية

$v + h$  في معادلة المنحنى ومقدار  $v$  الذي يستخرج منها يكون

هو عين مقدار  $v'$  فاذا كانت معادلة  $v = m s^2$  مثلا يوجد

$v$  بتغير  $s$  بكمية  $s + h$  و  $v$  بالآخر  $v'$

$$\text{ويكون } v' = m s^2 + 2 m s h + m h^2$$

٣ • ولناخذ الآن معادلة  $v = s^2 \dots \dots \dots (١)$

ونفرض فيها ان  $v$  نصير  $v'$  حين تغير  $s$  بكمية  $s + h$

$$\text{فيحدث لنا } v' = (s + h)^2 \text{ وبجملها يوجد}$$

$$v' = s^2 + 2 s h + h^2$$

وبطرح معادلة (١) من هذه المعادلة يوجد

$$v' - v = 2 s h + h^2 \text{ وضممتها}$$

على ه يوجد

$\frac{\text{صه} - \text{صه}}{\text{ه}} = ٣ \text{ سر} + ٣ \text{ سهه} + \text{ه} \dots\dots\dots (٢)$   
 وحيث كانت كمية صه - صه تبين الزيادة التي تأخذها كمية صه  
 حين تزداد كمية سه بمقدار ه يعلم من ذلك ان كمية  $\frac{\text{صه} - \text{صه}}{\text{ه}}$  هي  
 نسبة الزيادة التي تأخذها الدالة المفروضة صه الى الزيادة التي ياخذها  
 متغير سه

واذا نظرنا الى الطرف الثاني من هذه المعادلة فنشاهد ان هذه النسبة تأخذ  
 في النقصان كلما نقصت كمية ه وحين تصير كمية ه صفرا تقول هذه  
 النسبة الى ٣ سر وبعلم من ذلك ان حد ٣ سر هو نهاية النسبة  
 $\frac{\text{صه} - \text{صه}}{\text{ه}}$  وهذا الحد هو الذي ينبغي نغويه كلما اخذ ه في النقص  
 \* ٤ \* لكنه يفرض ه = ٠ تقول كمية صه - صه الى  
 صفرا ايضا فمعادلة (٢) تقول حينئذ الى هذه

$$\div = ٣ \text{ سه} \dots\dots\dots (٣)$$

ولا استحالة في هذه المعادلة لانه يفهم من الجبر ان  $\div$  قد يكون دالا على سائر  
 انواع الكميات فتارة يستدل به على كمية محدودة وتارة يبين كمية غير محدودة  
 وتارة يكون صفرا ولك ان تقول انه حيث كانت قيمة الكسر لا تتغير بقسمة  
 حذيه على عدد واحد ينتج ان تصغير الحدين غير ضار في مقداره وينبئ على ذلك  
 ان حقيقة الكسر لا تتغير اذا بلغ حذاه النهاية في الصغري يعني اذا انعدما  
 وكسر  $\div$  الذي يوجد في معادلة (٣) هو عبارة عن رسم حل محل نسبة زيادة  
 الدالة الى زيادة المتغير وحيث لم يبق هذا الرسم اثرا للمتغير المذكور لزم ابداله برمز

$$\frac{\text{واصه}}{\text{واسه}} \text{ ليعلم به ان الدالة كانت صه والمتغير كان سه}$$

و واصه و واصه يتغير اعتبارهما في الحقيقة على حسب جنس المسألة  
 فقد يعتبران اصفا راعدا وقد يعتبران كميات صغيرة جدا و يوجد اذا ذلك

واصه

$$\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}} = ٣ \text{ سه} \dots\dots\dots (٤)$$

كمية  $\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}}$  او مقدارها الذي هو ٣ سه هو المسمى العامل او المكثر  
التفاضلي للدالة المفروضة

\* ٥ \* وليتنبه انه حيث كان  $\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}}$  هو الرمز الدال على كمية

٣ سه التي هي حد النسبة او نهايتها كما يتبينه معادلة (٤) فكان الواجب ان  
يبق  $\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$  موضوعا تحت  $\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}}$  لكن نظرا لسهولة العمليات الجبرية  
يخذف مقام معادلة (٤) عند اللزوم ويحدث منها اذن  $\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}} = ٣ \text{ سه}$  واسه  
وكمية ٣ سه واسه هي التي تسمى تفاضل الدالة المفروضة سه

\* ٦ \* للبحث عن تفاضل دالة  $٦ + ٣ \text{ سه}$  بالوجه المشروح  
نضع سه =  $٦ + ٣ \text{ سه}$

ثم نغير كمية سه بكمية سه + ه ورمز للناتج بحرف سه  
فيوجد سه =  $٦ + ٣ \text{ سه} + ٦ \text{ سه} + ٣ \text{ سه}$

وبطرح معادلة سه =  $٦ + ٣ \text{ سه}$  من هذه المعادلة يوجد

سه - سه =  $٦ \text{ سه} + ٣ \text{ سه}$  وبالقسمة على ه يكون

$\frac{\text{سه} - \text{سه}}{\text{ه}} = \frac{٦ \text{ سه} + ٣ \text{ سه}}{\text{ه}}$  ثم يجعل ه = ٠ فيوجد

$\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}} = ٦ \text{ سه}$  واذن يكون التفاضل المطلوب  $\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}} = ٦ \text{ سه}$

\* ٧ \* ولنمثل بمثال ثالث فنبعث عن تفاضل سه =  $٢ \text{ سه} - ١ \text{ سه}$   
ولذلك نبذل سه بكمية سه + ه فيوجد

سه =  $٢ \text{ سه} + ٢ \text{ سه} + ٣ \text{ سه} + ٢ \text{ سه}$  واذن يكون

$\frac{\text{سه} - \text{سه}}{\text{ه}} = \frac{٢ \text{ سه} + ٣ \text{ سه} + ٢ \text{ سه} + ٢ \text{ سه}}{\text{ه}}$  وحين نرتقي الى النهاية نجد

قاصه = ٣ دسه<sup>٢</sup> وهذا هو المكثراتفاضلي للدالة المفروضة والتفاضل

يكون قاصه = ٣ دسه<sup>٢</sup> واسه

\* ٨ \* نفرض ايضا ان المراد ايجاد تفاضل صه =  $\frac{١-سه^٢}{سه}$

ولذلك نجري عملية القسمة فيحدث لنا صه<sup>٢</sup> = ١ + سه + سه<sup>٢</sup>

ثم نضع سه + ه محل سه و صه محل صه فيحدث

صه<sup>٢</sup> = ١ + سه + ه + سه<sup>٢</sup> + سه<sup>٢</sup> + ه<sup>٢</sup> وبترتيب هذه بالنسبة

الى ه يكون صه<sup>٢</sup> = ١ + سه + سه<sup>٢</sup> + (١ + سه<sup>٢</sup>) ه + ه<sup>٢</sup>

ومن هذا يستخرج صه - صه<sup>٢</sup> = ٢ سه + ١ + ه وفي النهاية يوجد

قاصه = ٢ سه + ١ واسه

وتفاضل كمية  $\frac{١-سه^٢}{سه}$  يكون حينئذ (٢ سه + ١) واسه

\* ٩ \* ولنمثل ايضا بهذا المثال

صه = (سه<sup>٢</sup> - ٢ سه<sup>٢</sup>) (سه<sup>٢</sup> - ٣ سه<sup>٢</sup>) ولذلك نحل الطرف الثاني فنجد

صه = سه<sup>٤</sup> - ٥ سه<sup>٣</sup> + ٦ سه<sup>٢</sup> ونضع سه + ه محل سه و صه

محل صه ثم نرتبه بالنسبة الى ه فيوجد

صه = سه<sup>٤</sup> - ٥ سه<sup>٣</sup> + ٦ سه<sup>٢</sup> + (٤ سه<sup>٣</sup> - ١٠ سه<sup>٢</sup>) ه

+ (٦ سه<sup>٢</sup> - ٥ سه<sup>٢</sup>) ه<sup>٢</sup> + ٤ سه<sup>٢</sup> ه<sup>٢</sup> واذن يكون

صه - صه<sup>٢</sup> = ٤ سه<sup>٣</sup> - ١٠ سه<sup>٢</sup> + (٦ سه<sup>٢</sup> - ٥ سه<sup>٢</sup>) ه

+ ٤ سه<sup>٢</sup> ه<sup>٢</sup> وبالاتقاء الى النهاية يوجد

قاصه = ٤ سه<sup>٣</sup> - ١٠ سه<sup>٢</sup> وبالضرب في واسه يظهر ان

التفاضل المطلوب يكون قاصه = (٤ سه<sup>٣</sup> - ١٠ سه<sup>٢</sup>) واسه

\* ١٠ \* واسه هي بنفسها تفاضل كمية سه لانه اذا

فرض صه = سه يوجد صه<sup>٢</sup> = سه + ه ويكون

صه

صه - صه = هه وبالقصة على هه يوجد  $\frac{\text{صه} - \text{صه}}{\text{هه}} = ١$   
 وحيث لم تكن كية هه داخله في الطرف الثاني من هذه المعادلة يظهر أنه

يكفي لأجل الانتقال الى النهاية أن يغير  $\frac{\text{صه} - \text{صه}}{\text{هه}}$  برمز  $\frac{\text{واصه}}{\text{واسه}}$  وعلى

ذلك يكون  $\frac{\text{واصه}}{\text{واسه}} = ١$  ومنه  $\text{واصه} = \text{واسه}$

\* ١١ \* ولنبأمل أنه في بعض الاوقات تكون زيادة المتغير سلبية  
 وفي هذه الحالة يلزم استبدال كية صه بكية صه - هه وبفعل  
 كما تقدم

فلايجاد تفاضل صه<sup>٣</sup> مثلا حين تكون الزيادة سلبية نغير صه بكية  
 صه - هه فيوجد

$\text{صه}^٣ - \text{صه}^٢ = ٣ \text{صه}^٢ \text{هه} + ٣ \text{صه} \text{هه}^٢ - \text{هه}^٣$  وانين يكون

$\frac{\text{صه}^٣ - \text{صه}^٢}{\text{هه}} = ٣ \text{صه}^٢ + ٣ \text{صه} \text{هه} - \text{هه}^٢$

وجد بالانتقال الى النهاية  $\frac{\text{واصه}}{\text{واسه}} = ٣ \text{صه}^٢$  ومنه

$\text{واصه} = ٣ \text{صه}^٢ \text{واسه}$  وحيث أنه لو كانت الزيادة موجبة  
 لوجد  $\text{واصه} = ٣ \text{صه}^٢ \text{واسه}$

يفهم من ذلك أنه لايجاد التفاضل حين تكون الزيادة سلبية يلزم تغيير إشارة  
 واسه في التفاضل الموجود بفرض الزيادة موجبة

\* ١٢ \* ولنتقدم قبل التحون في العلم تنبها لا بد منه وذلك أنه اذا غيروه  
 صه بكية صه + هه في معادلة بهذه الصورة

$$\text{صه} = \text{ك} (\text{صه})$$

بمعنى طرفها الثاني دالة لهذا المتغير ثم رتب النتائج بحسب الدرجات التصاعدي  
 لكمية هه فالحد الاول منه يكون مساويا لكمية صه

ولذلك نفرض أنه بعد تغيير صه بكية صه + هه وترتيب النتائج

وقد وضعت للدالة بأول حرف  
 منها وهو الدال هكذا كي  
 او هكذا د او هكذا و وربما  
 وضعت فوقها او تحتها علامات  
 او ارقام على حسب التمام مقتضى  
 كلها دوال متغايرة

يوجد الحل  $\text{صه} = \text{ع} + \text{هه} + \text{ده} + \text{ره} + \text{الخ} + \dots + \text{الخ}$   
 فأقول انه لا بد وان يكون  $\text{ع} = \text{صه}$

لانه بفرض  $\text{هه} = ٠$  في المعادلة الاخيرة يتوول طرفها الثاني الى  
 $\text{ع}$  ويتوول طرفها الاول الى  $\text{صه}$  لان  $\text{صه}$  انما صارت  $\text{صه}$   
 بسبب التغير الذي لحقها من تغير  $\text{سه}$  بكمية  $\text{سه}$  +  $\text{هه}$  فبانعدام  $\text{هه}$   
 ترجع  $\text{صه}$  ضرورة الى حالتها الاولى وهى  $\text{صه}$  وينتج من ذلك ان  $\text{صه}$   
 $\text{ع} =$

\* ١٣ \* وبذلك يتوصل الى شرح كيفية تعميم طريقة التفاضل فانه  
 اذا غيرنا  $\text{سه}$  بكمية  $\text{سه}$  +  $\text{هه}$  في معادلة  $\text{صه} = \text{ك} (\text{سه})$   
 التى لم تعين فيها الكمية المينة برمز  $\text{ك} (\text{سه})$  (بل صرف النظر عن تعيينها  
 لزيادة التعميم) وفرضنا ان الناتج يكون مرتبا بحسب الدرجات التصاعدية  
 لكمية  $\text{هه}$  وكان هذا الناتج

$$\text{صه} = \text{ع} + \text{هه} + \text{ده} + \text{ره} + \text{الخ} + \dots + \text{الخ}$$

ثم وضع فيه  $\text{صه}$  بدلا عن  $\text{ع}$  المساوية لها كما تقدم برهانه في (١٢)

$$\text{وحدث صه} = \text{صه} + \text{هه} + \text{ده} + \text{ره} + \text{الخ} + \dots + \text{الخ أو}$$

$$\text{صه} - \text{صه} = \text{هه} + \text{ده} + \text{ره} + \text{الخ} + \dots + \text{الخ وفرضنا}$$

$$\text{هه} = ٠ \text{ في النهاية كان } \frac{\text{صه}}{\text{سه}} = \text{ك}$$

ومن هذا يفهم ان المكرر التفاضلى يساوى مكرر الحد المحتوى على كمية  
 $\text{هه}$  بدرجة اولى في حل  $\text{ك} (\text{سه} + \text{هه})$  المرتب بحسب الدرجات  
 التصاعدية لكمية  $\text{هه}$

\* (تفاضل حاصل ضرب متغيرين) \*

\* ١٤ \* لايجاد تفاضل حاصل ضرب متغيرين نعتبر التين مختلفتين  
 بمتغير واحد  $\text{سه}$  وزمرنا لهما بحرفى  $\text{صه}$  و  $\text{ع}$  ثم نغير فى كل منهما  
 متغير  $\text{سه}$  بكمية  $\text{سه}$  +  $\text{هه}$  وزمرنا للناتج بحرفى  $\text{صه}$  و  $\text{ع}$   
 ونفرض

\*(١٣)\*

ونفرض انهما يكونان بعد الترتيب بالنسبة الى هـ هكذا

$$\text{صه} = \text{صه} + \text{ده} + \text{ده} + \text{ره} + \dots + \text{الخ} \quad (٥)$$

$$\text{ع} = \text{ع} + \text{ده} + \text{ده} + \text{ره} + \dots + \text{الخ} \quad (٦)$$

قبل الارتفاع الى النهاية يوجد

$$\frac{\text{ع}}{\text{واسه}} = \text{ز} = \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} \quad (٧)$$

وبضرب معادلتى (٥) و (٦) فى بعضهما يوجد

$$\text{ع صه} = \text{ع صه} + \text{ع ده} + \text{ع ده} + \text{ع ره} + \text{الخ}$$

$$+ \text{صه ده} + \text{ده ده} + \text{ده ره} + \text{الخ}$$

$$+ \text{صه ده} + \text{الخ}$$

ثم انه اذا طرح ع صه من كل من الطرفين وقسم الخارج على هـ يوجد

$$\frac{\text{ع صه} - \text{ع صه}}{\text{هـ}} = \text{ع ده} + \text{ده صه} + (\text{ع ده} + \text{ده ده} + \text{ده صه}) + \text{هـ} + \text{الخ}$$

ولايجاد نهاية النسبة يفرض هـ = ٠ فيحدث

$$\frac{\text{ع صه}}{\text{واسه}} = \text{ع ده} + \text{ده صه}$$

(ووضع النقطة فى واسه بدل على انه يراد اخذ تفاضل ع صه) ثم نضع

فى هذه المعادلة عوضا عن ز و ده مقاديرها المينة بمعادلتى (٧) فنجد

$$\frac{\text{ع صه}}{\text{واسه}} = \frac{\text{ع واسه}}{\text{واسه}} + \frac{\text{صه واسه}}{\text{واسه}} \quad \text{وبحذف المقام المشترك}$$

$$\text{يوجد أن } \frac{\text{ع صه}}{\text{واسه}} = \text{ع واسه} + \text{صه واسه}$$

وفيه من ذلك انه لايجاد تفاضل حاصل ضرب متغيرين يلزم ضرب كل منهما

فى تفاضل الآخر ثم تجمع الحواصل

\* ١٥ \* وبواسطة هذه الطريقة يوجد بالسهولة تفاضل حاصل ضرب

ثلاثة متغيرات ولذلك يفرض صه ع ر مثلا ويوضع ع ر = ١

ومن بعد الذى تقدم يوجد

$$١٠ صه ل = صه و ل + ل و صه ..... (٨)$$

وحيث كان ل = ع ر فبأخذ تفاضله حكم القدر يكون

$$و ل = ع و ر + و ع$$

واذا وضعنا في معادلة (٨) عوضا عن ل و و ل المصادر الاخيرة

$$يوجد أن و ٠ صه ع ر = صه ع و ر + صه و ع + ع و صه$$

ويشاهد حينئذ أن الطريقة المتقدمة تجري ايضا على تفاضل حاصل ضرب

ثلاث متغيرات يعني انه لايجاد هذا التفاضل يكتب حاصل ضرب صه ع ر

وغيره كل متغير بتفاضله على التوالي وحاصل جمع الحواصل الحادثة يكون

هو التفاضل المطلوب

\* ١٦ \* وهذه القاعدة عامة لايجاد تفاضل حاصل ضرب اى عدد

كان من المتغيرات

\* ١٧ \* حيث ان تفاضل كمية د صه هو د و صه يعلم من ذلك

انه متى توجد كمية ثابتة في حاصل ضرب ينبغي ان يؤخذ تفاضل حاصل الضرب

بصرف النظر عن المضروب الثابت ثم بعد أخذ التفاضل بضرب الناتج

في الكمية الثابتة ومن ثمة كان تفاضل كمية د صه مثلا

$$د و صه + د صه و$$

\* ١٨ \* والكمية الثابتة ليس لها تفاضل لانه اذا فرض

$$صه = د صه + ب ثم اجريت عملية (بند ٧) ظهر أن و صه = د و صه$$

وهذا الناتج هو عين الناتج الذى ينتج اذا لم يكن للثابت ب وجود

\* (في تفاضل الكسر) \*

$$* ١٩ * \text{تفاضل كسر } \frac{صه و}{صه} \text{ يساوى } \frac{صه و صه - و صه و}{صه^2}$$

ولاثبات ذلك نفرض ان  $\frac{صه و}{صه} = ع$  ثم نحذف المقام فيوجد

$$صه = صه ع \text{ وبموجب (بند ١٤) يكون } و صه = صه و ع$$

$$+ ع و صه \text{ ويستخرج من ذلك } و صه و ع = و صه - ع و صه$$

واذا





١٧٦

$$\frac{م^١ - م^١}{م^١} = \text{خاصة}$$

وبسبب كون تفاضل الكمية الثابتة صفراً تقول هذه المعادلة الى

$$\frac{م^١}{م^١} = \text{خاصة} \quad \text{ثم يعمل التفاضل المشار اليه بقاعدة (بند ٢١)}$$

$$\frac{م^١}{م^١} = \text{خاصة} \quad \text{فيكون} \quad \frac{م^١}{م^١} = \text{خاصة} \quad \text{ولاجراء عمل القسمة يلزم ان}$$

يطرح أس كمية م التي في المقسوم عليه من أس كمية م التي

$$\text{في المقسوم فيوجد} \quad \frac{م^١}{م^١} = \text{خاصة} \quad \text{أو}$$

$$\frac{م^١}{م^١} = \text{خاصة} \quad \text{وهو موافق لقاعدة (بند ٢١)} \quad \text{وبه يتم المراد}$$

• (تفاضل المتغير المجذور) •

\* ٢٣ \* لايجاد تفاضل متغير مجذور يحول هذا المتغير الى أس

كسرى وتجري عليه قاعدة (بند ٢١) فلايجاد تفاضل كمية

$$\frac{١}{٢} م^{\frac{١}{٢}} \text{ مثلا فنقولها الى } \frac{١}{٢} م^{\frac{١}{٢}} \text{ وتفاضل هذه يكون}$$

$$\frac{١}{٢} م^{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢} م^{\frac{١}{٢}}$$

ويعلم من ذلك انه لايجاد تفاضل الجذر التربيعي لكمية متغيرة يلزم قسمة تفاضل هذه الكمية على ضعف الجذر

(تنبيه) حيث انه بفرض م = ١ في معادلة

$$\frac{١}{٢} م^{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢} م^{\frac{١}{٢}} \quad \text{المينة في (بند ٢٢) يوجد}$$

$$\frac{١}{٢} م^{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢} م^{\frac{١}{٢}} \quad \text{وذلك عبارة عن}$$



$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{ع-ه}{ه} = ل + ل' + ل'' + ..... الخ \\ \frac{ص-صه}{صه} = ل + ل' + ل'' + ..... الخ \end{array} \right.$$

وبضرب هاتين المعادلتين في بعضهما طرفا بطرف يحدث

$$\frac{ص-صه}{صه} \times \frac{ع-ه}{ه} = (ل + ل' + ل'' + ..... الخ) (ل + ل' + ل'' + ..... الخ)$$

وحيث كان ك هو زيادة ع فيكون ع - ك = ع

وينبغي على ذلك ان الطرف الاول للمعادلة الاخيرة ينزل الى

$$\frac{ص-صه}{ه} \text{ وبوضع } ص - صه \text{ محل } ه \text{ نؤول المعادلة}$$

المذكورة الى

$$(11) \quad \frac{ص-صه}{صه} = (ل + ل' + ل'' + ..... الخ) (ل + ل' + ل'' + ..... الخ)$$

وحين تنعدم ه تنعدم ك ايضا لان ع انما ازادت بقدر ك

وصارت ع لما ازادت صه كية ه وصارت صه + ه

فبناء على ذلك نؤول معادلة (١١) في النهاية اعني في حالة فرض ه = ٠

$$(12) \quad \frac{واص}{واس} = ل \times ل$$

ولتعيين كيتي ل و ل' ينبغي ان يفرض ان ه = ٠ و ك = ٢

في معادلتى (١٠) فيحدث من ذلك

$$\frac{واس}{واس} = ل \text{ و } \frac{واص}{واس} = ل$$

فتوضع حينئذ هذه التقادير عوضا عن ل و ل' في معادلة (١٢)

$$(13) \quad \frac{واس}{واس} \times \frac{واص}{واس} = \frac{واص}{واس}$$

وهذا الناتج يبين انه لايجاد مكرر  $\frac{واس}{واس}$  التفاضلى من بين معادلتين بهذه

الصورة

$$صه = د ع \text{ و } ع = دمه$$

يكفى ان نستخرج المكثرات  $\frac{واصة}{وا ع}$  و  $\frac{فاع}{واسه}$  التفاضلية من هاتين المعادلتين ثم نضرب النواتج في بعضها وحاصل الضرب الحادث يكون هو مكثر  $\frac{واصة}{واسه}$  التفاضلى المطلوب

$$* ٢٥ * \text{ فاذا فرضنا مثلاً } صه = ٣ ع \text{ و } ع = ٢ دمه + دسه$$

$$\text{ فيحدث من ذلك } \frac{واصة}{واسه} = ٦ ع \text{ و } \frac{فاع}{واسه} = ٣ دمه + ٢ دسه$$

وبضرب هذين المكثرين في بعضهما يكون

$$\frac{واصة}{واسه} = ٦ ع (٣ دمه + ٢ دسه) = ٦ (دسه + دمه) (٣ دمه + ٢ دسه)$$

\* ٢٦ \* قانون (١٣) يستعمل بكثرة في أخذ تفاضل الكميات العسرة ولتمثيل بعض منها نقول

$$\text{ نبحث عن ايجاد تفاضل } صه = \sqrt{د - دمه} \text{ فنلك يقول الى ايجاد المكثر التفاضلى } \frac{واصة}{واسه} \text{ ولذا نضع } د - دمه = ع \text{ فيكون بناء عليه}$$

$$صه = ع \sqrt{\frac{١}{د}}$$

ومعادلتا صه = د ع و ع = دمه (بند ٢٤) تؤولان

$$\text{ حينئذ الى } صه = ع \sqrt{\frac{١}{د}} \text{ و } ع = دمه - دمه = دمه - دمه$$

فبأخذ تفاضل كل من طرفيهما (بند ٢١) يوجد

$$\frac{واصة}{واسه} = \frac{١}{د} \sqrt{\frac{١}{د}} = \frac{١}{د} (د - دمه) \sqrt{\frac{١}{د}} \text{ و } \frac{فاع}{واسه} = - ٢ دمه$$

وبضرب

• (٢١) •

وبضرب هذين المكررين التفاضلين في بعضهما يوجد

$$\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}} = - \text{سه} - \frac{1}{\text{سه} - \text{سه}^2} = \frac{\text{سه} - \text{سه}^2}{\text{سه} - \text{سه}^2} \text{ واذن يكون}$$

$$\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}} = \frac{\text{سه} - \text{سه}^2}{\text{سه} - \text{سه}^2}$$

وليسكن ايضا  $\text{سه} = (\text{سه} + \text{سه}^2)$  فلاجل ايجاد التفاضل نجعل

$$\text{سه} + \text{سه}^2 = \text{ع} \text{ فيحدث من ذلك معادلتا}$$

$$\text{سه} = \text{ع} \text{ و } \text{سه} + \text{سه}^2 = \text{ع} \text{ واذن يكون}$$

$$\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}} = \frac{\text{سه} - \text{سه}^2}{\text{سه} - \text{سه}^2} = \frac{\text{سه} - \text{سه}^2}{\text{سه} - \text{سه}^2} \text{ و } \text{سه} = \frac{\text{سه} - \text{سه}^2}{\text{سه} - \text{سه}^2}$$

وبضرب هذين المكررين التفاضلين في بعضهما يوجد

$$\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}} = \text{سه} - \text{سه}^2 = (\text{سه} + \text{سه}^2) - \text{سه}^2 \text{ والتفاضل المطلوب يكون}$$

$$\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}} = \text{سه} - \text{سه}^2 = (\text{سه} + \text{سه}^2) - \text{سه}^2$$

$$\text{• ٢٧ •} \text{ ولنخل بمثال ثالث فنفرض } \text{سه} = (\text{سه} - \text{سه}^2)$$

$$\text{ثم نضع } \text{سه} - \text{سه}^2 = \text{ع} \text{ فيكون } (١٤) \dots \dots \dots$$

$$\text{سه} = (\text{سه} - \text{سه}^2) \text{ فيحدث من ذلك معادلة } (١٥) \dots \dots \dots$$

$$\text{وبأخذ تفاضل معادلة } (١٤) \text{ يحدث } \text{واسه} = \frac{\text{سه} - \text{سه}^2}{\text{سه} - \text{سه}^2} \text{ ومن}$$

$$\text{ذلك } \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = \frac{\text{سه} - \text{سه}^2}{\text{سه} - \text{سه}^2} \text{ ويحدث ايضا من معادلة } (١٥)$$

$$\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = (\text{سه} - \text{سه}^2) \cdot \frac{\text{سه} - \text{سه}^2}{\text{سه} - \text{سه}^2} = (\text{سه} - \text{سه}^2) \cdot \frac{\text{سه} - \text{سه}^2}{\text{سه} - \text{سه}^2}$$

وباستبدال ع بمقدارها توول المعادلة الاخيرة الى



لأننا ابتنا فيما مر أن الكميات الثابتة ليس لها تفاضل ولذا نتحد كيتا  
 $m = 2s + 7$  و  $m = 2s + 7$  +  $s = 2s + 7$  -  $s = 2s + 7$   
 في التفاضل اذ تفاضل كل منهما  $m = 2s + 7$  +  $s = 2s + 7$   
 \* (في التفاضلات المتوالية) \*

\* ٣٠ \* التفاضلات المتوالية لدالة مفروضة هي عبارة عن تفاضل  
 هذه الدالة وتفاضل المكرر التفاضلي لها وتفاضل المكرر التفاضلي - الاخير وهكذا  
 حتى ينتهي الى  $m = 2s + 7$  ثابت يعني انه اذا فرض ان  $s$  تكون دالة لمتغير  
 $s$  مثلا ثم اخذ تفاضل هذه الدالة وكان هذا التفاضل  $s$  ثم اخذ  
 تفاضل كمية  $s$  اذا اشتملت على متغير  $s$  وكان هذا التفاضل  
 $s$  واخذ ايضا تفاضل كمية  $s$  اذا فرض ان  $s$  اشتملت على متغير  $s$   
 وكان التفاضل الحادث  $s$  واستمر هكذا الى أن يصير المكرر التفاضلي غير  
 محتوي على متغير  $s$  فكميات  $s$  و  $s$  و  $s$  و  $s$  الخ  
 هي التي تسمى التفاضلات المتوالية لدالة  $s$  والاول منها يسمى التفاضل  
 الاول والثاني يسمى التفاضل الثاني وهكذا الخ

فاذا فرض أن  $s = 2s + 7$  مثلا حدث  
 $s = 2s + 7$

وهذا هو التفاضل الاول لكمية  $s$

واذا وضع  $s = 2s + 7$  واخذ التفاضل وجد

$s = 2s + 7$  وهذا هو التفاضل الثاني

واذا وضع ايضا  $s = 2s + 7$  واخذ التفاضل فيوجد ان

$s = 2s + 7$  وهذا هو التفاضل الثالث

وقد انتهت التفاضلات المتوالية في هذا المثال الى هنا لان تفاضل كمية  $s$   
 الثابتة صفر

والمكررات التفاضلية التي هي  $s$  و  $s$  و  $s$  الخ  
 للتفاضلات المتوالية تسمى المكررات التفاضلية المتوالية وليتنبه انه يمكن



$$\frac{\text{واصة}}{\text{واصة}} = ٢ + ٣ \times ٢ + ٤ \times ٣ + ٥ \times ٤ + \dots$$

$$\frac{\text{واصة}}{\text{واصة}} = ٢ + ٣ \times ٢ + ٤ \times ٣ \times ٢ + ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ + \dots$$

وإذا رمزنا برمز (واصة) لما نتوول اليه صه حين يفرض فيها صه = ٠

وبرمز  $\left(\frac{\text{واصة}}{\text{واصة}}\right)$  لما نتوول اليه كبة  $\frac{\text{واصة}}{\text{واصة}}$  حين يفرض فيها

صه = ٠ وبرمز  $\left(\frac{\text{واصة}}{\text{واصة}}\right)$  لما نتوول اليه كبة  $\frac{\text{واصة}}{\text{واصة}}$  حين يفرض

فيها صه = ٠ وهكذا

فالعلامات السابقة نتوول الى (واصة) = ٢ و  $\left(\frac{\text{واصة}}{\text{واصة}}\right) = ٣$

$$\text{و } ٢ = \left(\frac{\text{واصة}}{\text{واصة}}\right) \text{ و } ٣ \times ٢ = \left(\frac{\text{واصة}}{\text{واصة}}\right)$$

ومنما يستخرج

$$٢ = (واصة) \text{ و } ٣ = \left(\frac{\text{واصة}}{\text{واصة}}\right) \text{ و } ٤ = \left(\frac{\text{واصة}}{\text{واصة}}\right)$$

$$\text{و } ٥ = \left(\frac{\text{واصة}}{\text{واصة}}\right) \frac{1}{٢ \times ٣}$$

وإذا وضعنا هذه المقادير في معادلة (١٦) فتوول الى

$$\text{صه} = (واصة) + \left(\frac{\text{واصة}}{\text{واصة}}\right) \text{ صه} + \left(\frac{\text{واصة}}{\text{واصة}}\right) \frac{1}{٢} + \dots$$

$$+ \left(\frac{\text{واصة}}{\text{واصة}}\right) \frac{1}{٢ \times ٣} + \dots \dots \dots (١٧)$$

وهذا هو قانون مكلوران ودستوره

• (٢٦) •

• (المثال الاول) •

• ٢٢ • حل كمية  $\frac{1}{s+7}$  بواسطة قانون مكلوران نضع

$s = -7$  فنجد بأخذ تفاضل الطرفين

$$\frac{1}{s+7} - \frac{1}{s+7} = \frac{(s+7) - 1}{(s+7)^2} = \frac{s+6}{(s+7)^2}$$

وبقسمة الطرفين على  $s+7$  يوجد

$$\frac{1}{s+7} - \frac{1}{s+7} = \frac{s+6}{(s+7)^2}$$

وبأخذ التفاضل ثانياً ونالنا الخ يحدث من بعد القسمة على  $s+7$

$$\frac{1}{(s+7)^2} = \frac{(s+7)}{(s+7)^3} = \frac{s+6}{(s+7)^3}$$

$$\frac{1}{(s+7)^3} - \frac{1}{(s+7)^3} = \frac{(s+7) - 1}{(s+7)^4} = \frac{s+6}{(s+7)^4}$$

ثم نغرض  $s = -7$  في مقادير  $s+7$  و  $\frac{1}{(s+7)^2}$  و  $\frac{1}{(s+7)^3}$  الخ

$$\frac{1}{(s+7)^2} = \left( \frac{s+6}{(s+7)^3} \right) \frac{1}{s+7} = \left( \frac{s+6}{(s+7)^4} \right) \frac{1}{s+7}$$

$$\frac{1}{(s+7)^3} = \left( \frac{s+6}{(s+7)^4} \right) \frac{1}{s+7}$$

ثم نضع هذه المقادير ومقدار  $s+7$  الحادث بغرض  $s = -7$  ايضاً:

في قانون (١٧) فيحدث لنا

$$\frac{1}{s+7} = \frac{1}{s+7} + \frac{1}{(s+7)^2} - \frac{1}{(s+7)^3} + \frac{1}{(s+7)^4} - \frac{1}{(s+7)^5} + \dots$$

• (المثال الثاني) •

• ٢٣ •  $\frac{1}{s+7}$  نضع  $s = -7$  فنجد

و

•(٢٧)•

$$\frac{s}{\sqrt{s^2 + r^2}} \cdot \frac{1}{r} = s^{\frac{1}{r}} - (s^2 + r^2)^{\frac{1}{r}} = \frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}}$$

$$\frac{s^{\frac{1}{r}} \times \frac{1}{r}}{\sqrt{s^2 + r^2}} = s^{\frac{r}{r}} - (s^2 + r^2)^{\frac{1}{r}} \times \frac{1}{r} = \frac{\text{قاصه}^2}{\text{قاسه}^2}$$

$$\frac{s^{\frac{r}{r}} \times \frac{1}{r} \times \frac{1}{r}}{\sqrt{s^2 + r^2}} = s^{\frac{r^2}{r}} - (s^2 \times r^2)^{\frac{1}{r}} \times \frac{1}{r} \times \frac{1}{r} = \frac{\text{قاصه}^3}{\text{قاسه}^3}$$

واذا فرضنا أن  $r = 0$  . نؤول هذه المقادير إلى صه  $r = \left(\frac{1}{r}\right) = \text{صه}$

$$\frac{s^{\frac{1}{r}} \times \frac{1}{r}}{r} = \left(\frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}}\right) \text{ و } \frac{s^{\frac{1}{r}}}{r} = \left(\frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}}\right)$$

$$\text{و بوضعها في قانون (١٧) نؤول هذا} \quad \frac{s^{\frac{r}{r}} \times \frac{1}{r} \times \frac{1}{r}}{r} = \frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}}$$

القانون الى

$$\sqrt{s^2 + r^2} = \frac{s}{r} + \frac{s^2}{r^2} - \frac{s^3}{r^3} + \frac{s^4}{r^4} - \dots$$

•(المثال الثالث)•

\* ٣٤ \* ولناخذ صه  $(s + r)$  مثالا فلناضربها بـ  
التفاضل

$$\frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}} = m (s + r)^{1-m}$$

$$\frac{\text{قاصه}^2}{\text{قاسه}^2} = m (1-m) (s + r)^{1-2m}$$

$$\frac{\text{قاصه}^3}{\text{قاسه}^3} = m (1-m) (2-m) (s + r)^{1-3m}$$

ونجعل  $m = 0$  . يقول مقدار  $v$  الى  $m$  يعنى انه يوجد  $(v) = m$

وتقول المكثرات التفاضلية  $\frac{v}{v^2}$  و  $\frac{v}{v^2}$  الى

$$\frac{v}{v^2} = \left( \frac{v}{v^2} \right) \quad \text{و} \quad \frac{v}{v^2} = \left( \frac{v}{v^2} \right) (1-m)^{2-m}$$

$$\text{و} \quad \frac{v}{v^2} = \left( \frac{v}{v^2} \right) (1-m)(2-m)^{2-m} \quad \text{وتوضع هذه المقادير في}$$

قانون (١٧) فيوجد

$$(v+m) = \frac{v}{v^2} + m + \frac{v}{v^2} (1-m)^{2-m}$$

$$+ \frac{v}{v^2} (1-m)(2-m)^{2-m} + \text{الخ}$$

• (في تفاضل الكميات العالية) •

• ٣٥ • الكمية العالية هي التي تكون متبوعة باسم متغير

اولوغاريتم اوجيب تمام وما اشبه ذلك

• ٣٦ • ولنفرض اولاً ان المراد ايجاد تفاضل هذه الكمية

ولذلك نضع  $v = m$  ثم نفكر في  $v$  بكمية  $m + h$  فتغير  $v$  بكمية  $v$  وتقول هذه المعادلة الى

$$v + h = v \quad \text{أو} \quad v = v \times h$$

ثم نحل كية  $v$  بالنسبة لقوى  $h$  ولا يتيسر ذلك بقانون الكمية ذاتها  
الحديث لا يجعل  $1 + v$  ومن ثم يكون

$$v = (1+v) = \frac{v}{1} + h + \frac{v}{1} (1-h) + \frac{v}{1} (1-h)^2 + \text{الخ}$$

$$+ \frac{v}{1} (1-h)(2-h)^2 + \text{الخ}$$

وترتب

وترتب هذه بالنسبة الى ه لكن بدون اجراء العملية لاتنا لم نحتاج الالحدود  
المضروبة في اول قوى ه وبالأمل يطهرانه اذا فرض حاصل هذه الصورة  
ه (ه - ١) (ه - ٢) (ه - ٣) الخ بحيث يكون احد جزئيه  
(ه - ١) (ه - ٢) (ه - ٣) الخ يتركب من مضارب عدتها ٢  
فحل هذا الجزء من بعد نظر المعادلات يكون هكذا

$$ه + ا ه + ب ه + \dots + م ه + ن$$

وحد ٢ يكون مركبا من حاصل ضرب الاجزاء الثانية - ١ و - ٢ و - ٣ الخ

لذوات الحدين ه - ١ و ه - ٢ و ه - ٣ الخ  
ويكون لا محالة

$$ه (ه - ١) (ه - ٢) (ه - ٣) الخ = ه (ه + ا ه + \dots + م ه + ن)$$

ومن البين ان الحد المشتق على ه بدرجة اولى في هذا الحاصل هو

$$٢ ه أو (١ - ٢ \times ٣ - ٣ \times ٢ - ٢ \times ١) ه$$

منه انه لايجاد الحدود المتبوعة بأول قوى ه في الحدود الصعبة في حل

(١٨) وهي من الحد الثالث فصاعداتشكل مكررات ه اختلفة بالوجه

الآتي وهو أن مكرر ه يتركب من حاصل ضرب الاعداد المجردة عن ه

$$في \frac{٢}{٣ \times ١} للحد الثالث وفي \frac{٣}{٣ \times ٢} للحد الرابع وهلم جرا وينبني على$$

$$ذلك ان ١ = ه + (١ - \frac{٢}{٣} + \frac{٣}{٣} - \frac{٣}{٣} الخ) ه + الحدود$$

المحتوية على ه و ه<sup>٢</sup> الخ

$$واذا رمزنا بحرف ع لكمية (١ - \frac{٢}{٣} + \frac{٣}{٣} - \frac{٣}{٣} الخ) يحدث لنا$$

$$١ = ه + ع ه + الحدود المحتوية على ه و ه<sup>٢</sup> و ه<sup>٣</sup> الخ$$

واذا وضعنا هذا المقدار في معادلة ص = ٢ = آت هذه المعادلة

الى صه =  $\overline{c} + \overline{c} + \overline{c} + \overline{c} + \overline{c}$  الحدود المحتوية على ه<sup>١</sup> وعلى ه<sup>٢</sup> وعلى ه<sup>٣</sup> الخ  
واذا طرحنا المعادلة الاولى التي هي صه =  $\overline{c}$  من هذه المعادلة يتبقى  
صه - صه =  $\overline{c} + \overline{c} + \overline{c} + \overline{c} + \overline{c}$  الحدود المحتوية على ه<sup>١</sup> و ه<sup>٢</sup> و ه<sup>٣</sup> و ه<sup>٤</sup> و ه<sup>٥</sup> الخ  
وبالارتقاء الى النهاية يوجد  $\frac{\text{واصه}}{\text{واسه}} = \overline{c} + \overline{c} + \overline{c} + \overline{c} + \overline{c}$  وبوضع مقدار صه

$$\text{عوضا عنها يوجد } \frac{\text{واصه}}{\text{واسه}} = \overline{c} + \overline{c} + \overline{c} + \overline{c} + \overline{c} \dots \dots \dots (١٩)$$

كمية ح الثابتة تتعلق بكمية  $\overline{c}$  لانه اذا وضعنا عوضا عن ح  
مقدارها الذي هو  $\overline{c} - ١$  في معادلة

$$\text{حدث } (١ - \overline{c} + \frac{\overline{c}^2}{٢} - \frac{\overline{c}^3}{٦} + \frac{\overline{c}^4}{٢٤} - \dots \dots \dots) = \overline{c}$$

$$\overline{c} = (١ - \overline{c}) + \frac{\overline{c}^2}{٢} - \frac{\overline{c}^3}{٦} + \frac{\overline{c}^4}{٢٤} - \dots \dots \dots + \frac{\overline{c}^n}{n!} - \dots \dots \dots (٢٠)$$

• ٣٧ • ولنشرع في كيفية ايجاد مقدار اخر سهل للكمية ح

الثابتة ولذلك نبعث عن حل كمية  $\overline{c}$  بواسطة قضية مكلوران فيكون

$$\text{صه} = \overline{c}$$

$$\frac{\text{واسه}}{\overline{c}} = \overline{c}$$

$$\frac{\text{واسه}}{\overline{c}^2} = \frac{\text{واسه}}{\overline{c}} \cdot \overline{c} = \overline{c} = \frac{\text{واسه}}{\overline{c}^2}$$

$$\frac{\text{واسه}}{\overline{c}^3} = \dots \dots \dots = \frac{\text{واسه}}{\overline{c}^3}$$

وبجعل

ويجعل  $\epsilon = 0$  يوجد

$$1 = \frac{\epsilon}{\epsilon} = 1$$

$$\epsilon = \left( \frac{\epsilon}{\epsilon} \right)$$

$$\epsilon = \left( \frac{\epsilon}{\epsilon} \right)$$

$$\epsilon = \left( \frac{\epsilon}{\epsilon} \right) \dots \dots \dots \epsilon$$

وبوضع هذه المقادير في قانون (١٧) يوجد

$$\epsilon = 1 + \frac{\epsilon}{1} + \frac{\epsilon}{1} + \frac{\epsilon}{1} + \dots \dots \dots \epsilon$$

وحيث انه بأخذ متغير  $\epsilon$  اى مقدار كان لا يتغير مقدار  $\epsilon$  الثابت فيمكننا ان نضع  $\epsilon = \frac{1}{\epsilon}$  ونقول المعادلة الاخيرة حينئذ الى

$$\frac{1}{\epsilon} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots \dots \dots \epsilon$$

ثم نرمز للطرف الثانى من هذه المعادلة برمز  $\epsilon$  فنقول الى

$$\frac{1}{\epsilon} = \epsilon \text{ ويستخرج من ذلك } \epsilon = \epsilon \text{ وبأخذ لوغاريتم كل}$$

من الطرفين يوجد

$$\log \epsilon = \log \epsilon \text{ لوغا } \epsilon = \log \epsilon \text{ ومنه يحدث}$$

$$\frac{\log \epsilon}{\log \epsilon} = \epsilon \dots \dots \dots (٢١)$$

وعدد  $\epsilon$  المعلوم مقداره بمعادلة  $\epsilon = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots \dots \dots \epsilon$

هو الذى اتخذه نيبير اساسا لحساب جداول لوغارتماته المسماة باللوغارتمات الطبيعية او الزائدية وقد يكفى بال عشرة حدود الاول من

\*(٣٢)\*

منسلسلة ١ + ١ +  $\frac{1}{2 \times 2 \times 1} + \frac{1}{2 \times 1} + \dots$  الخ  
ويوجد حينئذ هـ = ٢,٧١٨٢٨١٨ تقريباً واذا ضربنا برمز  
لوح

لوح للوغاريتم ٧ في الجملـة الطبيعية والارثـدة نجد = (٢,٧١٨٢٨١٨)

واختصارا ٧ = هـ واذن لوغا ٧ = لوغا هـ \* لوغا ٧ = لوغا هـ

ويستخرج من ذلك  $\frac{\text{لوغا}}{\text{لوغا هـ}} = \text{لوح}$  وبهذا تؤول معادلة (٢١) الى

ع = لوح ومن ثم يستخرج من معادلة (١٩)

وا ٧ = ٧ و ٧ = لوح ٧ ..... (٢٢)

\*(في التفاضلات اللوغاريتمية)\*

٣٨ \* لكن مر لوغاريتم لكمية مر في الجملـة التي اساسها

٧ فيوجد مر = ٧ وباخذ تفاضل الطرفين (بند ٣٦) يحدث

وامر = ع ٧ و ٧ ومنه يستخرج

وامر =  $\frac{\text{وامر}}{\text{ع}} = \frac{\text{وامر}}{\text{لوغا ٧}} \times \text{لوغا هـ}$  وبضرب كيتي الكسر الكل في

لوغا هـ يوجد

وامر =  $\frac{\text{وامر}}{\text{ع}} \times \text{لوغا هـ}$  وبما ان ٧ = مر وكانت مر = لوغامر

تؤول المعادلة السابقة الى و ٧ = لوغا مر =  $\frac{\text{وامر}}{\text{ع}} \times \text{لوغا هـ}$

وفي الحالة التي تؤخذ فيها اللوغاريتمات من جملـة نبيير يكون ٧ = هـ

ويوجد  $\frac{\text{لوغا هـ}}{\text{لوغا هـ}} = ١$  واذن يكون و ٧ = لوغامر =  $\frac{\text{وامر}}{\text{ع}}$

هذا

هذا بالنسبة للوعار يتم الطبيعى الذى اساسه هـ  
اما اذا كان هذا الاساس حينما اتفق بأن كان > مثلا فانه يوجد

$$\text{لوعا} > = ١ \text{ فقط ويكون } \text{لوصه} = \frac{\text{واصه}}{\text{وصه}} \text{ لوعا هـ}$$

فى تفاضل الجيوب وجيوب التمام وكذا باقى الخطوط المساحية  
او فى تفاضل الدوال القوسية

\* ٣٩ \* القوس اكبر من جيبه واصغر من ظلّه ابدا ولا ثبات ذلك  
تقرض قوسه اب (شكل ٢) جيب هذا القوس يكون > و ظلّه  
يكون > ا ثم نأخذ قوس ا- مساويا ا- نخط > يكون خطا  
مستقيما فهو اصغر من خط > واذن يكون نصف هذا المستقيم وهو  
الجيب > و اصغر من نصف هذا المنحنى وهو > اعنى قوس الجيب  
واما اثبات كون الظل اكبر من قوسه فهو انه تقول حيث ان مثلث > ح  
اكبر من قطاع > ا- ح يوجد > ح > ا ح < قوس > ا- ح > ا ح  
وباسقاط > ا ح من الطرفين يبقى > ح < قوس > ا- ح ويتنصف  
الطرفين يوجد > ا ح < قوس > ا وهذا ما أردنا اثباته

\* ٤٠ \* وينتج مما سبق ان نهاية نسبة الجيب الى قوسه  
واحد لانه متى يكون قوس > ا صفرا ينطبق الجيب على الظل  
فينطبق الجيب على القوس من باب الاولى ويعلم من ذلك انه يوجد فى النهاية  
 $\frac{\text{ح}}{\text{قوس ا}} = ١$  وبالرمز بحرف هـ لقوس > ا يكون  
 $\frac{\text{ح}}{\text{هـ}} = ١$

\* ٤١ \* ولايجاد تفاضل الجيب الذى قوسه > ح تقرض ان هذا  
القوس يزداد زيادة قدرها هـ فيحدث بواسطة حساب المثلثات

جا (ح+هـ) = جاسه جتاه + جاه جتاسه ٠٠٠ (٢٣)  
وبطرح جاسه يعنى حالة الجيب الاولى من كل من طرفى هذه المعادلة

ثم بالقسمة على الزيادة هـ للمتغير يوجد

$$\frac{\text{جاسه} + \text{ها} - \text{جاسه}}{\text{هـ}} = \frac{\text{جاسه} - \text{جاسه} + \text{جاسه} - \text{جاسه}}{\text{هـ}}$$

وبأخذ جاسه مضروباً مشتركاً في الطرفين الثاني للمعادلة الأخيرة يوجد

$$\frac{\text{جاسه} + \text{ها} - \text{جاسه}}{\text{هـ}} = \frac{\text{جاسه} (\text{جاسه} - \text{ها})}{\text{هـ}} + \frac{\text{جاسه} - \text{جاسه}}{\text{هـ}} \quad (٢٤)$$

ومتى نصير هـ صفراً ينعدم جاسه - ١ ويؤول  $\frac{\text{جاسه} - \text{ها}}{\text{هـ}}$

الى ٠ والاصلح حينئذ أن يوضع هذا الحد بصورة أخرى ولذلك يستخرج

$$\text{من معادلة جاسه} + \text{جاسه} = ١$$

$$\text{جاسه} - ١ = - \text{جاسه} \text{ أو } (\text{جاسه} - ١) (\text{جاسه} + ١) = - \text{جاسه}$$

$$\text{ومنه يستخرج جاسه} - ١ = - \frac{\text{جاسه}}{\text{جاسه} + ١}$$

فنضع هذا المقدار في معادلة (٢٤) فنقول تلك المعادلة الى

$$\frac{\text{جاسه} + \text{ها} - \text{جاسه}}{\text{هـ}} = \frac{\text{جاسه}}{\text{جاسه} + ١} + \frac{\text{جاسه}}{\text{جاسه} + ١} - \frac{\text{جاسه}}{\text{جاسه} + ١} \quad (٢٥)$$

وحين يفرض هـ = ٠ يوجد  $\frac{\text{جاسه}}{\text{هـ}} = ١$  و  $\frac{\text{جاسه}}{\text{جاسه} + ١} = \frac{٠}{١} = ٠$

$$\text{ومعادلة (٢٥) تقول بهذا السبب الى } \frac{\text{جاسه}}{\text{هـ}} = \text{جاسه}$$

ويستخرج منه  $\frac{\text{جاسه}}{\text{هـ}} = \text{جاسه}$  وهو المطلوب

\* ٤٢ \* هذا اذا كان نصف قطر الجدول مساوياً لواحد فاذا لم يكن

كذلك بان كان نق مثلاً فتستعمل عوضاً عن معادلة (٢٣) هذه المعادلة

$$\text{جا} (\text{س} + \text{هـ}) = \frac{\text{جاسه} - \text{جاسه}}{\text{نق}} + \frac{\text{جاسه} - \text{جاسه}}{\text{نق}}$$

ومن ثم يلزم انما ثابتة نق في الناتج السابق ويوجد

$$\frac{\text{جاسه}}{\text{نق}} = \frac{\text{جاسه}}{\text{نق}} \text{ لتفاضل جيب القوس الذي نصف قطره نق}$$

\* ٤٣ \* ويمكن ايجاد تفاضل جاسه بواسطة الاعتبار

الهندسية لانه اذا رسمنا بحرف س قوس ا- (شكل ٣) وبحرف

هـ لقوس س-م كان عمود س-ح هو جاسه وعمود م-ك هو

تبا (سم + هـ) هذا وكما قل قوس هـ كبرت زاوية مـ ر الى ان نصير قائمة حين يصير قوس هـ صفرا ويعلم من ذلك انه يمكن اعتبار زاوية مـ ر قائمة في حالة النهاية وبصير مثلث مـ ر حينئذ مشابها لمثلث مـ ر ح لان اضلاع هذه المثلثات تكون اعمدة على بعضها في هذه الحالة وتحدث اذن هذه التناسبة مـ ر : ح :: م : سم :: م : م أو نق : جناسه :: م : جا (سم + هـ) — جاسه ومنها يستخرج

$$\frac{\text{حاسه}}{\text{حاسه} - \text{هاسه}} = \frac{\text{جناسه}}{\text{ق}} \text{ وفي النهاية يمكن تغيير روتر مـ ر بقوسه الذي هو مـ ر = هـ فاذا اعتبرنا ذلك فتؤول المعادلة السابقة الى}$$

$$\frac{\text{ق} \cdot \text{جاسه}}{\text{هاسه}} = \frac{\text{جناسه}}{\text{ق}} \text{ او}$$

$$\frac{\text{ق} \cdot \text{جاسه}}{\text{ق}} = \text{ق} \cdot \text{جاسه} \text{ وباعتبار نصف القطر واحدا يكون}$$

$$\text{ق} \cdot \text{جاسه} = \text{جناسه} \cdot \text{ق}$$

\* ٤٤ \* ولا يجاد تفاضل جيب التمام جناسه نأخذ تفاضل

معادلة جاسه + جناسه = ١ أو وهو الاول

$$(\text{جاسه})^1 + (\text{جناسه})^1 = ١ \text{ (بند ٢١) فيوجد}$$

$$٢ \text{ جاسه} \cdot \text{ق} + ٢ \text{ جاسه} \cdot \text{ق} = ٠ \text{ ويستخرج من}$$

$$\text{ذلك} \text{ ق} \cdot \text{جاسه} = - \frac{\text{جاسه}}{\text{جناسه}} \cdot \text{ق} \text{ جاسه ثم نضع في هذه بدلا عن}$$

$$\text{ق} \cdot \text{جاسه} \text{ مقداره} \text{ ق} \cdot \text{سم جناسه المميز في (بند ٤١) ونختصر}$$

$$\text{فيوجد} \text{ ق} \cdot \text{جاسه} = - \text{جاسه} \cdot \text{ق} \text{ وهو المطلوب}$$

$$\frac{\text{جاسه}}{\text{جناسه}} = \text{ق} \cdot \text{ظاسه} \text{ ولا يجاد تفاضل الظل نعتبر معادلة ظاسه =}$$

ثم نأخذ تفاضلا (بند ١٩) فنجد

$$\frac{\text{جاسه} \cdot \text{ق} - \text{جاسه} \cdot \text{ق} \cdot \text{جاسه} \cdot \text{ق}}{\text{جناسه}} = \text{ق} \cdot \text{ظاسه}$$

\*(٣٦)\*

ونضع عوضا عن  $\frac{1}{\text{جاسه}}$  و  $\frac{1}{\text{جاسه}}$  مقدار  $\frac{1}{\text{جاسه}}$  و  
و -  $\frac{1}{\text{جاسه}}$  فيحدث من ذلك

$$\frac{(\text{جاسه} + \text{جاسه})}{\text{جاسه}} = \frac{1}{\text{جاسه}}$$

واذن يكون  $\frac{1}{\text{جاسه}} = \frac{1}{\text{جاسه}}$  لأن  $\text{جاسه} + \text{جاسه} = 1$

\* ٤٦ \* يعرف من حساب المثلثات ان نصف القطر وسط متناسب  
بين الظل وظل التمام وبين جيب التمام والقاطع ومن ثمة  $\frac{1}{\text{جاسه}}$  كان

$\frac{1}{\text{جاسه}} = \frac{1}{\text{جاسه}}$  و  $\frac{1}{\text{جاسه}} = \frac{1}{\text{جاسه}}$  فاذا اخذتفاضل الاول  
(ببند ١٩) حدث

$$\frac{1}{\text{جاسه}} - \frac{1}{\text{جاسه}} = \frac{1}{\text{جاسه}} - \frac{1}{\text{جاسه}} = \frac{1}{\text{جاسه}}$$

لانه يستخرج من معادلة  $\frac{1}{\text{جاسه}} = \frac{1}{\text{جاسه}}$  ان  $\text{جاسه} = \text{جاسه}$

\* ٤٧ \* واذا اخذتفاضل المعادلة الثانية التي هي  $\frac{1}{\text{جاسه}} = \frac{1}{\text{جاسه}}$

$$\frac{1}{\text{جاسه}} - \frac{1}{\text{جاسه}} = \frac{1}{\text{جاسه}} - \frac{1}{\text{جاسه}} = \frac{1}{\text{جاسه}}$$

$$\frac{1}{\text{جاسه}} - \frac{1}{\text{جاسه}} = \frac{1}{\text{جاسه}} - \frac{1}{\text{جاسه}} = \frac{1}{\text{جاسه}}$$

\* ٤٨ \* ولايجاد تفاضل قاطع التمام تأخذ تفاضل معادلة

$$\frac{1}{\text{جاسه}} = \frac{1}{\text{جاسه}}$$

$$\frac{1}{\text{جاسه}} - \frac{1}{\text{جاسه}} = \frac{1}{\text{جاسه}} - \frac{1}{\text{جاسه}} = \frac{1}{\text{جاسه}}$$

$$= \frac{1}{\text{جاسه}}$$

\* ٤٩ \* واما لايجاد تفاضل الجيب المنكوس وهو جزء نصف القطر  
المحصور بين موقع الجيب والقوس فيمكن ان يؤخذ تفاضل هذه المعادلة

• (۳۷) •

$$\begin{aligned} \text{جامنکوس سه} + \text{جتاسه} &= ۱ \text{ فيحدث من ذلك} \\ ۰ \cdot \text{جامنکوس سه} + ۰ \cdot \text{جتاسه} &= ۰ \text{ أو} \\ ۰ \cdot \text{جامنکوس سه} - \text{جاسه واسه} &= ۰ \text{ أو} \\ ۰ \cdot \text{جامنکوس سه} &= \text{جاسه واسه} \end{aligned}$$

• (في تفاضل بعض دوال عالية عسرة) •

• ۵۰ • القواعد السابقة تكفي لمعرفة تفاضل أي دالة منبوعة

$$\begin{aligned} \text{بكمية عالية لانه اذا فرضنا مثلا أن سه} &= \text{د}^{\text{سه}} \text{ ووضعنا د}^{\text{سه}} = \text{ع} \\ \text{وجدنا سه} &= \text{د}^{\text{ع}} \text{ وبأخذ التفاضل (بند ۳۷) يكون} \\ \text{واسه} &= \text{د}^{\text{ع}} \text{ لود واسه أو} \\ \text{واسه} &= \frac{\text{د}^{\text{ع}}}{\text{واسه}} = \text{د}^{\text{د}^{\text{ع}}} \text{ لود} \end{aligned}$$

وكذا يوجد بأخذ تفاضل طرفي معادلة  $\text{د}^{\text{سه}} = \text{ع}$  ان

$$\begin{aligned} \text{واسه} &= \text{د}^{\text{د}^{\text{سه}}} \text{ واسه أو} \\ \text{واسه} &= \frac{\text{د}^{\text{د}^{\text{سه}}}}{\text{واسه}} \text{ واذن يكون (بند ۴۴)} \end{aligned}$$

$$\text{واسه} \times \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = \text{د}^{\text{د}^{\text{د}^{\text{سه}}}} \text{ لود}$$

• ۵۱ • ليكن ايضا سه = ع' (ع و ر كيات متغيرة)

فأخذ لوغاريتم كل من الطرفين فيحدث

$$\begin{aligned} \text{لوعا سه} &= \text{ر لوعا ع} \text{ ثم نأخذ التفاضل فيحدث} \\ ۰ \cdot \text{لوعا سه} &= \text{ر لوعا ع} + \text{لوعا ع واسه} \end{aligned}$$

ونضع عوضا عن التفاضلات اللوغاريتمية مقاديرها (بيند ٢٨) فيكون:

$$\frac{v}{v'} = r \frac{v}{v'} + \log a \quad \text{و بناء على ذلك يكون}$$

$$v = v' \left( r \frac{v}{v'} + \log a \right) = \left( r \frac{v}{v'} + \log a \right) v'$$

وبواسطة هذا التفاضل يوجد بالسهولة تفاضل  $v = v'$

(وكيات  $v$  و  $v'$  كلاهما متغيرة) لانه اذا وضعنا  $v = v'$  في التفاضل المعادلة الى  $v = v'$

ومعادلتنا  $v = v'$  و  $v = v'$  الشبهتان بالمعادلة المأخوذ تفاضلهما انما ينشأ عنهما

$$v = v' \left( r \frac{v}{v'} + \log a \right)$$

$$v = v' \left( r \frac{v}{v'} + \log a \right)$$

كافي المثال السابق في اول البند  
واذا وضعنا في مقدار  $v$  المبين بالمعادلة التي قبل الاخيرة عوضا عن  $v$  و  $r$  مقاديرها وجدنا

$$v = v' \left[ \log a + \left( r \frac{v}{v'} + \log a \right) \right]$$

$$v = v' \left( \log a + r \frac{v}{v'} + \log a \right) = v' \left( 2 \log a + r \frac{v}{v'} \right)$$

• (في قضية تبلور) •

• ٥٢ • قبل التجوّن تبين ان الكمية التي كانت كمية  $v$

في حساب التفاضل تدل على انه أخذ تفاضلا دالة  $v$  المتعلقة بتغير واحد

أو بجملة متغيرات وهذا لاخذ كان بالنسبة الى متغير  $س$  ثم قسم الناتج

على  $واس$  كما لو كان  $صه = د س ع^٢ ر^٢$  مثلاً فان كمية  $\frac{واس}{واس}$  فيها

توجد باخذ التفاضل بحسب  $س$  يعنى باعتبار كيتى  $ع$  و  $ر$  ثابتين  
ثم بقسم التفاضل على  $واس$  فيحدث من ذلك

$$\frac{واس}{واس} = ٢ د س ع^٢ ر^٢ س \text{ وكذا يوجد أن}$$

$$\frac{واس}{واس} = ٢ د س ع^٢ ر^٢ س \text{ و } \frac{واس}{واس} = ٤ د س ع^٢ ر^٢ س$$

واذا فرض  $صه = س + ع$  فانه يوجد

$$\frac{واس}{واس} = ٢ س \text{ و } \frac{واس}{واس} = ٢ ع$$

\* ٥٣ \* اذا غير متغير  $س$  بكمية  $س + ه$  في دالة بهذه

الصورة  $صه = د س$  ثم اخذ تفاضل طرفها باعتبار كمية  $ه$

ثابتة وكمية  $س$  متغيرة فأقول أن المكرر التفاضلى لها في هذه الحالة يساوى

المكرر التفاضلى لها حين يؤخذ تفاضلها باعتبار كمية  $ه$  متغيرة وكمية  $س$  ثابتة

وبرهان ذلك هو أنه حيث كان بتغيير  $س$  بكمية  $س + ه$  يوجد

$$صه = د (س + ه) \text{ او}$$

$$صه = د س + د ه \text{ بفرض } س + ه = س \text{ فباخذ تفاضل}$$

الطرفين يكون  $\frac{واس}{واس} = د$  لكن تفاضل دالة  $س$  يتركب

من حاصل ضرب دالة اخرى الى  $س$  في  $واس$

فاذا فرض ان هذه الدالة تكون  $د س$  حدث من ذلك

$$\frac{واس}{واس} = د س \text{ و } \frac{واس}{واس} \text{ وبوضع } س + ه \text{ عوضا عن } س \text{ يكون}$$

$$\frac{واس}{واس} = د (س + ه) \text{ و } \frac{واس}{واس} (س + ه)$$

ومن البين ان التغير الذى يتسبب من جعل  $س$  متغيرة و  $ه$  ثابتة في هذا

التفاضل لم يخرج عن مضروب  $و$   $(س + هـ)$  الذي يؤول في هذه الحالة الى  $و$   $س$  فن اجل ذلك يكون

$$وَص = د (س + هـ) و س ومنه يستخرج$$

$$وَص = د (س + هـ) \dots\dots\dots (٢٦)$$

واما اذا كانت  $س$  هي الثابتة و  $هـ$  هي المتغيرة فان مضروب

$$و (س + هـ) يؤول الى  $و هـ$  ويكون$$

$$وَص = د (س + هـ) و هـ ومنه ينتج$$

$$وَص = د (س + هـ) \dots\dots\dots (٢٧)$$

وبماواة مقدارى  $د (س + هـ)$  ببعضهما يكون

$$\frac{وَص}{و} = \frac{وَص}{و هـ} \text{ وهو المطلوب بيانه واثباته}$$

مثال ذلك  $ص = د س^٣$  فانه يحدث بوضع  $(س + هـ)$  محل  $س$

$ص = د (س + هـ)^٣$  وبأخذ التفاضل بفرض  $س$  متغيرة

وعكسه يوجد

$$\frac{وَص}{و} = د س^٣ = د (س + هـ)^٣ = \frac{وَص}{و هـ} \text{ ومن ثم } \frac{وَص}{و} = \frac{وَص}{و هـ}$$

\* ٥٤ \* حيث انه بأخذ تفاضل معادلتى (٢٦) و (٢٧)

بالنسبة الى  $س + هـ$  توجد ايضا ناتج متساوية

$$\frac{وَص}{و} = د (س + هـ) و (س + هـ)$$

$$\frac{وَص}{و هـ} = د (س + هـ) و (س + هـ)$$

فاذا جعلنا  $هـ$  ثابتة فى الاولى و  $س$  ثابتة فى الثانية يحدث

$$\frac{\text{واصة}}{\text{واسر}} = \text{ز} (\text{مه} + \text{ه}) \text{ واسر} \text{ أو } \frac{\text{واصة}}{\text{واسر}} = \text{ز} (\text{مه} + \text{ه})$$

$$\frac{\text{واصة}}{\text{واه}} = \text{ز} (\text{مه} + \text{ه}) \text{ واه} \text{ أو } \frac{\text{واصة}}{\text{واه}} = \text{ز} (\text{مه} + \text{ه})$$

$$\frac{\text{واصة}}{\text{واه}} = \frac{\text{واصة}}{\text{واسر}}$$

وبمثل هذا يثبت أن

$$\frac{\text{واصة}}{\text{واسر}} = \frac{\text{واصة}}{\text{واه}} \text{ و } \frac{\text{واصة}}{\text{واسر}} = \frac{\text{واصة}}{\text{واه}} \text{ وهلم جرا}$$

\* ٥٥ \* هذا ولتكن ص دالة الى ته + ه فتحل هذه الدالة

بالنسبة الى قوى ه ونفرض انه يوجد

$$\text{ص} = \text{صه} + \text{ز ه} + \text{ز ه} + \text{ز ه} + \text{ز ه} + \text{الخ} (٢٨)$$

وكيات صه و ز و ز و ز و ز و ز ..... الخ هي دوال

الى كمية مه مجهولة ولتشرع في تعيينها بأن نأخذ تفاضل طرفي معادلة

(٢٨) بالنسبة الى متغير ه ونقسم الناتج على واه فيوجد

$$\frac{\text{واصة}}{\text{واه}} = \text{ز} + \text{ز ه} + \text{ز ه} + \text{ز ه} + \text{ز ه} + \text{الخ}$$

ونأخذ تفاضلها بالنسبة الى متغير مه ايضا ونقسم الناتج على واسر

فيحدث

$$\frac{\text{واصة}}{\text{واسر}} = \frac{\text{واصة}}{\text{واسر}} + \text{ه} \frac{\text{واصة}}{\text{واسر}} + \text{ه} \frac{\text{واصة}}{\text{واسر}} + \text{ه} \frac{\text{واصة}}{\text{واسر}} + \text{الخ}$$

ولما كان الطرفان الاولان لهاتين المعادلتين متساويين بمقتضى (٥٣)

لزم ان يكون الطرفان الثانيان متطابقين اعني متساويين تساويا تساوى فيه

مكررات قوى ه المتناظرة بحيث يكون





\*(٤٤)\*

صه = لو غاسه وبأخذ التفاضل يحدث

$$واصه = وا \cdot لو غاسه = \frac{واصه}{سر} \text{ ومنه ينتج .}$$

$$\frac{واصه}{واصه} = \frac{1}{سر} \text{ ثم يوجد بالتفاضلات المتوالية}$$

$$\frac{واصه}{واصه} = \frac{واصه}{واصه} - \frac{1}{سر} \text{ و } \frac{واصه}{واصه} = \frac{2}{سر} \text{ الخ}$$

وبوضع هذه المقادير في قانون تيلور يوجد

$$لو غا (سر + ه) = لو غاسه + \frac{ه}{سر} - \frac{ه^2}{2سر^2} + \frac{ه^3}{3سر^3} \text{ الخ}$$

\* ٥٩ \* يمكن بالسهولة إيجاد تفاضل اللوغاريتم بواسطة القانون

الاخبار اللوغاريتمية اذا فرض ان هذا القانون موجود بواسطة الجبر فقط كما هو

مبين في الملاحظة الاولى في آخر هذا الكتاب وبالحقيقة فانه يحدث منه

$$\frac{لو غا (سر + ه) - لو غاسه}{ه} = \frac{1}{سر} - \frac{ه}{2سر^2} + \frac{ه^2}{3سر^3} \text{ الخ}$$

وحين نرتقي الى النهاية نجد

$$\frac{وا \cdot لو غاسه}{واصه} = \frac{1}{سر} \text{ ومنه يحدث}$$

$$\frac{وا \cdot لو غاسه}{واصه} = \frac{واصه}{واصه}$$

وحيث انه قد علم تفاضل اللوغاريتم فيسهل من بعده إيجاد تفاضل  $ر$  لانه

بفرض صه =  $ر$  واخذ اللوغاريتم الطبيعي لكل من الطرفين يوجد

$$لوصه = لود = سر لود \text{ وبأخذ التفاضل يحدث}$$

$$\frac{واصه}{صه} = وا \cdot لود \text{ وينتج من ذلك}$$

$$واصه = صه \cdot وا \cdot لود \text{ وبوضع } ر \text{ عوضا عن صه يكون}$$

$$٦٠ = \frac{١٠٠}{١٠٠} = \frac{١٠٠}{١٠٠}$$

• ٦٠ • يمكن استنتاج قانون مكلوران من قانون بلور بالوجه الآتي وهو ان يجعل  $\frac{١٠٠}{١٠٠} = ٠$  في قانون بلور الذي هو

$$د(س+ه) = دس + \frac{١٠٠}{١٠٠} دس + \frac{١٠٠}{١٠٠} دس + \frac{١٠٠}{١٠٠} دس + \frac{١٠٠}{١٠٠} دس$$

وترمز برمز (دس) لما نؤول اليه دس حين يفرض فيها  $\frac{١٠٠}{١٠٠} = ٠$

وبرمز  $\left(\frac{١٠٠}{١٠٠} دس\right)$  لما نؤول اليه كمية  $\frac{١٠٠}{١٠٠} دس$  حين يفرض فيها

$\frac{١٠٠}{١٠٠} = ٠$  وهلم جرا نظرا لباقي المـكـتـرـرات التفاضلية فالقانون المذكور يؤول حينئذ الى

$$د ه = د(س+ه) + \left(\frac{١٠٠}{١٠٠} دس\right) + \left(\frac{١٠٠}{١٠٠} دس\right) + \frac{١٠٠}{١٠٠} دس + \frac{١٠٠}{١٠٠} دس$$

و ه في هذه المعادلة تدخل في د ه كما تدخل س في دس بحيث لو غيرت ه بكمية س آلت د ه الى دس وحيث لم يبق اثر الى س في المعادلة الاخيرة فلا سبيل لعدم التغير وبالحقيقة فلا فرق بين وضع اى حرف مكان ه وبين ه ومن ثم يوجد باجراء هذا التغير

$$دس = د(س+ه) + \left(\frac{١٠٠}{١٠٠} دس\right) + \left(\frac{١٠٠}{١٠٠} دس\right) + \frac{١٠٠}{١٠٠} دس + \frac{١٠٠}{١٠٠} دس$$

وهذا هو قانون مكلوران

• (في تفاضل المعادلات التي بمتغيرين) •

$$٦١ • لكن ك (س+ه) = ٠ (٢٩)$$

معادلة بمتغيرين فبعلها بالنسبة الى س يوجد

س = دس واذا وضعنا هذا المقدار في معادلة (٢٩) فتؤول الى

$$\begin{aligned} \text{ك} (\text{س و د س}) &= \text{أوالى} \\ \text{د س} &= \text{اختصارا} \end{aligned}$$

وهذه المعادلة الأخيرة هي متطابقة بجميع حدودها يعمو بعضها بعضا باخذ  
س اى مقدار كان فاذا لم تزد هذه المعادلة عن الدرجة الثالثة مثلا يمكن  
وضعها هكذا  $\text{ح س}^2 + \text{د س} + \text{ب س} + \text{و} = \text{و}$

وحيث انها لا تزال متحققة بأخذ متغير س اى مقدار كان فتتحقق بوضع  
س + ه فيها عوضا عن س ويوجد حينئذ

$$\text{ح} (\text{س} + \text{ه})^2 + \text{د} (\text{س} + \text{ه}) + \text{ب} (\text{س} + \text{ه}) + \text{و} = \text{و}$$

ويعلم من ذلك انه متى كان  $\text{د س} = \text{و}$  فلا بد وان يكون

$$\text{د} (\text{س} + \text{ه}) = \text{و} \text{ ايضا مهما كانت كمية س هذا اذا طرحت من}$$

هذه المعادلة معادلة  $\text{د س} = \text{و}$  بقى

$$\text{د} (\text{س} + \text{ه}) - \text{د س} = \text{و} \text{ أو}$$

$$\text{و} = \frac{\text{د} (\text{س} + \text{ه}) - \text{د س}}{\text{ه}}$$

$$\text{ولكن د} (\text{س} + \text{ه}) = \text{د س} + \text{د ه} + \text{د ب ه} + \text{د ح} + \text{د س} + \text{د ه} + \text{د ب ه} + \text{د ح}$$

$$\text{فيستخرج منه} \frac{\text{د} (\text{س} + \text{ه}) - \text{د س}}{\text{ه}} = \text{د ه} + \text{د ب ه} + \text{د ح} + \text{د س}$$

وحيث كان الطرف الاول لهذه المعادلة صفرا فيكون

$$\text{د ه} + \text{د ب ه} + \text{د ح} + \text{د س} = \text{و} \text{ كذلك وبالاتقاء}$$

الى النهاية يكون

$$\text{و} = \frac{\text{د س}}{\text{و س}} = \text{ح} = \text{و} \text{ وبجذف المقام يوجد}$$

$$\text{و} = \text{د س} = \text{ح و س} = \text{و} \text{ وباقاء صه يوجد}$$

$$\text{و} = \text{ك} (\text{س و صه}) = \text{ح و س} = \text{و}$$

ويعلم من ذلك انه اذا اخذ تفاضل معادلة ك (س و صه) = و باعتبار

كمية صه فيها دالة لمتغير صه امكن مساواة الناتج بصفر ويستعين

بذلك على إيجاد مقدار مكرر  $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$  التفاضلي كما استراه في المثال الآتي

وهو ان تفرض  $و$  (  $و$  و  $و$  )  $= و^2 + و^3 - و^4 = ٠$  (٣٠)  
فتأخذ تفاضليها بالطرق المعتادة وتلاحظ مساواة الناتج بصفر كما تقدم  
برهانه فتجد

$$٢ و^٢ و + ٣ و^٢ و - ٤ و^٢ و = ٠ \quad (٣١)$$

$$\text{ومنها يحدث} \quad \frac{\text{واحد}}{\text{واحد}} = \frac{و^٢}{و^٢ - و^٣} \dots\dots\dots (٣٢)$$

\* ٦٢ \* لمطابقة الطريقة التي استعملت لإيجاد هذا المقدار مع  
الطريقة التي استعملناها من أول الامر الى الآن يتظر انه يلزم أولا للعمل  
بالطريقة الاولى ان توضع معادلة (٣٠) بهذه الصورة  
 $و = و^٢ - و^٣$

يعني انه ينبغي حلها بالنسبة الى  $و$  ليستخرج منها بواسطة التفاضل مقدار  
 $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$  فبسبب هذه الطريقة نجد أولا

$$و = و^2 - و^3 \quad \pm \quad \frac{و^2}{و^2} \quad \text{ثم نجد بواسطة التفاضل}$$

$$\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}} = \frac{و}{و^2 - و^3} \pm = \frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$$

ومقدار  $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$  هذا مئين بصورة مخالفة للتي في معادلة (٣٢)

لكن اذا وضع مقدار  $و$  المستخرج من (٣٠) في معادلة (٣٢)  
يوجد

$$\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}} = \frac{و}{و^2 - و^3} \pm = \frac{و^2}{و^2 - و^3} \pm = \frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$$

وهو كالمبين قبل ومعادلة (٣١) هي التفاضل الاول لمعادلة (٣٠)

ولايجاد المعادلة التي يعلم بها المـ كـ ز التفاضلي بدرجة ثانية يعني  $\frac{واصة}{واسر}$

تقسم حدود معادلة (٣١) على  $\frac{واسر}{واسر}$  ويجعل  $ع = \frac{واصة}{واسر}$

فتؤول هذه المعادلة الى  $واسر + ع > ٣ + واسر - ع > ٢ = ٠$   
واذا اعتبرنا فيها بعد ذلك كيتي  $واسر$  و  $ع$  كدالتين لمتغير  $واسر$  نجد  
بواسطة التفاضل

$واسر + ع > ٣ + واسر - ع > ٢ = ٠$   
وبالقسمة على  $\frac{واسر}{واسر}$  ووضع  $ع$  عوضا عن  $\frac{واسر}{واسر}$  يوجد

$٢ + ع > ٣ + واسر - ع > ٢ = ٠$  ومنها  
يستخرج  $\frac{واسر}{واسر} = \frac{٢ - ع > ٢}{واسر - ٣} \dots\dots (٣٣)$

لكن حيث ان  $ع = \frac{واصة}{واسر}$  فيستخرج منه  $\frac{واسر}{واسر} = \frac{ع}{واسر}$

وبوضع هذه المقادير في معادلة (٣٣) عوضا عن  $ع$  و  $\frac{واسر}{واسر}$   
يوجد بعد حذف المقام

$واسر (٣ - ٢) = واسر (٢ - ٢) \dots\dots (٣٤)$   
وهذا هو التفاضل الثاني لمعادلة (٣٠) ولأجل ايجاد التفاضل الثالث

نجعل  $ع = \frac{واسر}{واسر}$  فتؤول معادلة (٣٣) بعد حذف مقامها الى  
 $٢ - ع > ٣ = واسر - ع > ٢$

ثم نعتبر كيتان  $واسر$  و  $ع$  و  $ع$  كدوال لمتغير  $واسر$  ونؤخذ

التفاضل وتكمل العملية كما في إيجاد التفاضل الثاني فيحدث التفاضل الثالث وهلم جرا

\* ٦٣ \* وعوضا عن استعمال حروف  $x$  و  $y$  و  $z$  والخ  
لأجل اجراء العمليات يؤخذ تفاضل معادلة (٣١) ويوضع فيها  $u$   
بدلا عن تفاضل  $v$  و  $u$  بدلا عن تفاضل  $v$  و  $u$   
بدلا عن تفاضل  $v$  وهكذا باعتبار  $u$  كمية ثابتة  
فينتهي الى ناتج كالسابق ويوجد بهذه الكيفية

$$u^2 + 3u^2 - 2u^2 - 2u^2 = 0$$

وهذه المعادلة هي كمعادلة (٣٤)

\* ٦٤ \* ولنبحث الآن عن المقدار العمومي لتفاضل معادلة  
د (س و ص) = ٠

ولذلك نرمز لكمية د (س و ص) بحرف  $E$  فنجد ياخذ  
تفاضل هذه الدالة بالنسبة الى متغير  $s$  هذا الحد  $\frac{E}{s}$  و  $s$

ونجد ايضا ياخذ تفاضلا بالنسبة الى متغير  $v$  هذا الحد الثاني  
 $\frac{E}{v}$  و  $v$  ويكون حيث  $D(s, v) = 0$  أو

$$E = \frac{E}{s} + \frac{E}{v} \text{ و اذا كانت ص}$$

معتبرة دالة لمتغير  $s$  فانه يوجد بأخذ تفاضلا  $\frac{E}{s} = \frac{E}{s}$  و  $s$

وبوضع هذا المقدار في كمية  $E$  يكون

$$E = \frac{E}{s} + \frac{E}{v} \text{ و اذا كانت ص}$$

\* ٦٥ \* واذا راجعت القضية المثبوتة في (بند ٢٤) شأدت ان

كمية  $c$  معتبرة كدالة لمتغير  $x$  و  $x$  معتبرة كدالة لمتغير  $y$   
 وحاصل ضرب  $\frac{c}{x} \cdot \frac{x}{y}$  ليس التفاضل  $c$  المأخوذ بنسبة  
 $y$  الداخلة في  $x$

\* ٦٦ \* لا كان التفاضل الكلي لدالة محتوية على  $x$  و  $y$  يعلم بمعادلة

$$c = \frac{c}{x} \cdot x + \frac{c}{y} \cdot y \quad \text{سميت كميات}$$

$\frac{c}{x}$  و  $\frac{c}{y}$  و  $\frac{c}{x}$  بالتفاضلات الجزئية للدالة  $c$   
 وكذلك اذا كانت  $c$  دالة لمتغيرات  $x$  و  $y$  و  $z$  الثلاث التي  
 ليست بعلاقة فانه يوجد

$$c = \frac{c}{x} \cdot x + \frac{c}{y} \cdot y + \frac{c}{z} \cdot z$$

$$\text{والحدود } \frac{c}{x} \text{ و } \frac{c}{y} \text{ و } \frac{c}{z} \text{ و } \frac{c}{x} \text{ و } \frac{c}{y}$$

تكون هي التفاضلات الجزئية للدالة  $c$

\* ٦٧ \* قد ذكرنا في (بند ٥٢) ان الكمية التي ككمية  $\frac{c}{x}$

تبين انه اخذ تفاضل دالة  $x$  بالنسبة لمتغير  $y$  وقسم الناتج بعد ذلك  
 على  $x$  فينتج من ذلك انه اذا وجدت معادلة  $\frac{c}{x} = c$

$$\frac{c}{x} = 1 \quad \text{واستخرج منها}$$

فلا يمكن ان يستنتج منها  $1 = c \cdot \frac{c}{x}$  بدون برهان لان التفاضل

في المعادلة الاخيرة لم يكن مأخوذا بالنسبة الى  $m$  بل هو مأخوذا بالنسبة الى  $m$  ولا يعرف هل التفاضل في الحالة الاخيرة كالتفاضل في الحالة الاولى او لا ورفع هذا الاشكال تقول انه قد ثبت في (بند ٢٤) ان

$$\frac{\text{واصه}}{\text{واسه}} \frac{\text{واعه}}{\text{واسه}} = \frac{\text{واعه}}{\text{واسه}}$$

فاذا فرضنا  $\epsilon = \delta$  فتؤول هذه المعادلة الى

$$\frac{\frac{1}{\text{واحد}}}{\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}} = \frac{\text{واحد}}{\text{واحد}} \text{ ومنه يحذف } \frac{\text{واحد}}{\text{واحد}} \frac{\text{واحد}}{\text{واحد}} = 1$$

وهذا يبين ان تغير فرضية المفاضل تتوافق مع الجبر وقواعده

\* ٦٨ \* ولنثبت القضية المنقذة من أول وهلة بأشياء آخر فنقول

$$\text{ليكن } \frac{\bar{ص} - \bar{ص}}{\bar{س} - \bar{س}} = \bar{ع} + \bar{ه} + \bar{ه} + \bar{ه} + \bar{خ}$$

$$\frac{1}{x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5} = \frac{x^{-5} - x^{-6}}{x^5 - x^6} \quad \text{فیندش منسه}$$

وباجراء عملية القسمه على الطرف الثانى او بجملة واسطة قانون مكوران يوجد

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{s - s'}{s - s'}$$

وفي النهاية يوجد  $\frac{\text{واسه}}{\frac{1}{\epsilon}} = \frac{1}{\epsilon}$  وجيثان  $\epsilon = \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$  ينتج

من ذلك ان  $\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = \frac{1}{\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}}$  ويثبت المطلوب

\* (في طريقة الماسات) \*

\* ٦٩ \* الطريقة التي يوجد بها المقدار المتناضلي للماس ونحت الماس

وانخط العمودى وتحت العمودى تسمى بطريقة المماسات وليكن ايسان ذلك

بعد نقطة م المأخوذة من نقطة منح ما (شكل ٤)

فتزيد الانقي  $اع = سه كية ح ع = ه$  ونرسم الرأسى  $ع م$   
ونمرر بنقطتى  $م$  و  $م$  قاطع  $م ع$  فن البين انه كلما نقص  $ح ع$   
مال خط  $ح ع$  الى الانطباق على تحت المماس  $ح ط$  ولا يزال كذلك الى  
ان يعدم  $ح ع = ه$  فيؤول  $ح ع$  الى تحت المماس  $ح ط$   
فى النهاية ويعلم من ذلك ان  $ح ط$  هو النهاية او الحد الذى يميل نحوه  $ح ع$   
ولنجث الآن عن المقدار الجبرى نلظ  $ح ع$  ليستخرج منه نهايته ولذلك  
نظنر انه يحدث من تشابه مثلثى  $م م ك$  و  $م ع ح$  هذا التناسب

$$م ك : م :: م ع : ح ع \text{ أو}$$

$$م ك : ه :: ح ع : ص ه \text{ ومنه يستخرج}$$

$$ح ع = \frac{ه ص}{م ك} \text{ ولتعيين } م ك \text{ نضع}$$

$$م ك = م ع - م ه \text{ لكن } م ع = ص ه = د (سه + ه) \text{ فيكون}$$

$$م ع = ص ه + \frac{ه^2}{٢ \times ١} + \frac{ه^3}{٣ \times ١} + \frac{ه^4}{٤ \times ١} + \dots$$

وغير ذلك  $م ع = ص ه$  فاذا طرحنا هاتين المعادلتين من بعضهما فانيوجد

$$م ع - م ه = م ك \text{ او } م ك = \frac{ه^2}{٢ \times ١} + \frac{ه^3}{٣ \times ١} + \frac{ه^4}{٤ \times ١} + \dots$$

واذا وضعنا هذا المقدار فى مقدار  $ح ع$  عوضا عن  $م ك$  نجد ان

$$ح ع = \frac{\frac{ه^2}{٢ \times ١} + \frac{ه^3}{٣ \times ١} + \frac{ه^4}{٤ \times ١} + \dots}{\frac{ه^2}{٢ \times ١} + \frac{ه^3}{٣ \times ١} + \frac{ه^4}{٤ \times ١} + \dots}$$

وبقسمة البسط والمقام على  $ه$  يكون

$$ح ع = \frac{\frac{ه}{٢ \times ١} + \frac{ه^2}{٣ \times ١} + \frac{ه^3}{٤ \times ١} + \dots}{\frac{ه}{٢ \times ١} + \frac{ه^2}{٣ \times ١} + \frac{ه^3}{٤ \times ١} + \dots}$$

وحيث انه يوجد فى النهاية  $ه = ٠$  و  $ح ع$  يتغير بنظ  $ح ط$

فيستخرج

• (٥٣) •

فيستخرج من المعادلة الأخيرة

$$ح ط = \frac{صه}{\frac{واسه}{واسه}} \text{ ومن بعد (بند ٦٧) يكون}$$

$$ح ط = صه \frac{واسه}{واسه} \text{ أو وهو الأولي}$$

$$ح ط = صه \frac{واسه}{واسه} = \text{تحت المماس بالرمز بحرفي صه و صه}$$

ليعدى نقطة م

\* ٧٠ \* إذا رسمنا من نقطة م (شكل ٥) خط م د عمودا على م ط فتمت العمودى يكون ح د ولتعيينه نعتبر تناسب

$$ح ط : م ط :: م ح : ح د \text{ أو}$$

$$صه \frac{واسه}{واسه} : صه :: صه : ح د \text{ فيحدث منه}$$

$$ح د = صه \frac{واسه}{واسه} = \text{تحت العمودى}$$

وأما من قبل الخط المماس والخط العمودى فنعتبر معادلتى

$$م ط = \sqrt{م ح + ح د}$$

$$م د = \sqrt{م ح + ح د}$$

فيحدث من الأولى

$$م ط = \sqrt{صه \frac{واسه}{واسه} + صه} = \sqrt{صه \frac{واسه}{واسه} + صه} = \text{المماس}$$

ويحدث من الثانية

$$م د = \sqrt{صه \frac{واسه}{واسه} + صه} = \sqrt{صه \frac{واسه}{واسه} + صه} = \text{العمودى}$$

\* ٧١ \* ولا يجاد معادلة الخط المماس تفرض ان  $صه$  و  $صه$  يكونان ابعاد نقطة التماس التي هي  $م$  فمعادلة مستقيم  $م ط$  المار بنقطة  $م$  يمكن بيانها برسم  $صه - صه = د (صه - صه)$  وكية  $د$  في هذه المعادلة نبين ظل زاوية  $م ط ح$  ومقدار هذا الظل هو  $\frac{م ط}{ح ط}$  لانه يحدث من متناسبة  $ح ط : م ح :: ١ : ظام ط ح$   

$$\frac{م ط}{ح ط} = \frac{ظام ط ح}{ح ط}$$
 ويتضح من بعد ذلك أن

$$\frac{ظام ط ح}{ح ط} = \frac{م ط}{ح ط} = \frac{صه}{تحت المماس} = \frac{صه}{\frac{صه}{\frac{واصه}{واصه}}} = \frac{واصه}{واصه}$$

فاذا وضعنا مقدار  $د$  هذا في معادلة الخط المماس تؤول تلك المعادلة الى  
 $صه - صه = \frac{واصه}{\frac{واصه}{(صه - صه)}}$  وهي معادلة الخط المماس المطلوبة  
ومعادلة الخط العمودي تكون حينئذ

$$صه - صه = \frac{واصه}{(صه - صه)}$$

• (تطبيق القوانين او الدساتير السابقة على الامثلة) •

• (المثال الاول) •

\* ٧٢ \* المراد ايجاد تحت المماس للقطع المكافى ولذلك نأخذ تفاضل طرفي معادلة القطع المكافى التي هي  $صه = ح صه$  بحسب نقطة التماس فيوجد  $صه - صه = ح واصله$  ومنه يحدث  

$$\frac{واصه}{واصه} = \frac{ح}{واصه} و \frac{واصه}{ح} = \frac{واصه}{واصه}$$
 وبوضع هذا المقدار في معادلة

٦٠٠)

$$ع ط = ص \frac{واصة}{واصة} \text{ يوجد}$$

$$\frac{ص^2}{ع} = ع ط$$

واذا وضعت في المعادلة الاخيرة ع ص عوضا عن ص حدث لك

$$ع ط اوتحت المماس = ص^2$$

\*(المثال الثاني)\*

المراد ايجاد تحت العمودى للقطع الناقص ولذلك ناخذ تفاضل طرفى معادلة القطع الناقص التى هى  $واس^2 + م^2 ص^2 = م^2 و^2$  يجعل النقطة الاصلية مركزه فيوجد  $2 واس واس + م^2 م^2 واصه = 0$  ويستخرج من

$$\text{ذلك } \frac{واصة}{واس} = - \frac{واس}{م^2 م^2} \text{ ثم نضع هذا المقدار فى تحت العمودى}$$

$$ع فيكون ع اوتحت العمودى = - \frac{واس}{م^2 م^2}$$

\*(المثال الثالث)\*

المراد ايجاد كمية الخط المماس للدائرة ولذلك ناخذ تفاضل معادلة الدائرة التى

$$\text{هى } واس^2 + ص^2 = تق^2 \text{ بحسب نقطة التماس فيوجد}$$

$$2 واس واس + 2 صه واصه = 0 \text{ ومنه يحدث}$$

$$\frac{واصة}{واس} = - \frac{صه}{واس} \text{ و } \frac{واس}{صه} = - \frac{واس}{صه}$$

ثم يوضع هذا المقدار فى معادلة

$$م ط = ص \left( \frac{واس^2}{واس^2} + 1 \right) \text{ فتؤول تلك المعادلة الى}$$

$$م ط = ص \left( \frac{صه^2}{صه^2} + 1 \right) = ص \frac{صه^2 + صه^2}{صه^2} = \frac{صه^2 تق^2}{صه^2} = \frac{تق^2}{صه} = \text{المماس}$$

\*(فى الخطوط المجاورة للخطوط المنحنية ويقال لها المقربة)\*

\* ٧٣ \* مقدار اط (شكل ٦) الذي هو بعد رأس المنحنى عن نقطة تقابل الخط المماس بالخط الافقى يستخرج بالسهولة من معادلة الخط المماس لانه اذا جعلت رأس المنحنى التى هى ا نقطة اصلية كان خط اط هو بعد هذه الرأس عن النقطة التى يكون فيها الرأسى م ح صفرا وحيث ان معادلة المماس م ط هى صه - صه =  $\frac{واصة}{واسه}$  (سه - سه) فيكنى ان يجعل في هذه المعادلة صه = ٠ ليكون مقدار منه الحادث منها مقدارا خط اط ويوجد اذالك

$$اط = سه = سه - سه = صه - \frac{واصة}{واسه} \text{ وهذا المقدار يكون هو بعد}$$

النقطة الاصلية عن نقطة تقابل الخط المماس بالاحداثى الافقى ولايجاد بعد النقطة الاصلية عن نقطة تقابل الخط المماس بالاحداثى الرأسى نبحث عن مقدار اب بان نقول انه لما كان هذا الخط هو الرأسى الموافق الى سه = ٠ في معادلة الخط المماس فيجب وضع سه = ٠ حينئذ

$$\text{في هذه المعادلة ليحدث منها سه = اب = صه - } \frac{واصة}{واسه}$$

ونفرض الان ان سه تصير غير منتهية وابعاد اط و اب لاتزال منتهية المقدار محدودة نخط ط ل (شكل ٧) ليقطع المنحنى حينئذ الاعلى بعد غير محدود فهو الخط المجرى للمنحنى المقروض

$$* ٧٤ * \text{ ولنقل بهذه المعادلة } سه = م سه + سه$$

$$\text{فستخرج منها } \frac{واصة}{واسه} = \frac{م سه + سه}{سه} \text{ واذن يكون}$$

$$\begin{aligned} اط = سه - \frac{واصة}{واسه} &= \frac{سه سه - م سه - سه}{سه} = \frac{سه سه - م سه - سه}{سه} \\ اب = سه - \frac{واصة}{واسه} &= \frac{سه سه - م سه - سه}{سه} = \frac{سه سه - م سه - سه}{سه} \end{aligned}$$

وبوضع مقدار صـ عوضا عنها يوجد بعد الاختصار

$$\text{اط} = - \frac{م}{ص + م} \text{ و اب} = \frac{م}{ص + م} \text{ وحين تقسم}$$

كيتا كل من هذه الكسور على صـ يوجد

$$\text{اط} = - \frac{م}{ص + م} \text{ و اب} = \frac{م}{ص + م}$$

ثم يجعل صـ = ∞ في هذه المقادير فيكون

$$\text{اط} = - \frac{م}{ص} \text{ و اب} = \frac{م}{ص}$$

ويعلم من ذلك انه يوجد للمنحنى المقروض مقربات مالم تكن كمية ص صفرا  
او سالبة لانه حين تكون كمية ص سالبة يصير مقدار اب المين ثنائية  
معادلات (٣٥) تخيليا ومن البين انه متى كانت ص سالبة انتسبت  
المعادلة الى قطع ناقص وتكون المعادلة بعينها معادلة قطع مكافئ متى كان  
مقدار ص صفرا وفي هذه الحالة يتبين من معادلات (٣٥) ان اط و اب  
يصيران غير منتهيين ويؤخذ منه ان القطع المكافئ لا مقرب له ولا محجاب

في معادلة المستوى المماس بسطح منحن ومعادلة

الخط العمودي لهذا السطح

$$* ٧٥ * \text{ لتكن د (ص و ع) = ٠ معادلة سطح}$$

$$\text{منحن و ع ص + ط ص + ع + ك = ٠ معادلة}$$

مستوفاذار من نابجروف صـ و صـ و ع لا بعد نقطة التماس التي

هي م فمعادلة المستوى بالنسبة الى هذه النقطة تكون

$$\text{ع ص + ط ص + ع + ك = ٠}$$

وبحذف ك من بين هاتين المعادلتين توجد المعادلة

$$\text{ع (ص - ص) + ط (ص - ص) + ع (ع - ع) = ٠ (٣٦)}$$

وهي معادلة المستوى المار بنقطة صـ و صـ و ع وترسم مستويا

موازيا للمستوى (ص و ع) مارا بنقطة التماس صـ و صـ و ع

فهذا المستوى يقطع السطح المنحني المفروض في معنى م (شكل ٨) ويقطع المستوى المماس في مستقيم م' والمستقيم م' يكون مماساً للمنحني م' والآن لقطع السطح المماس السطح المنحني ويمكن انتاج معادلة مستقيم م' من معادلة (٣٦) لانه حيث كان هذا المستقيم وهو تقاطع المستوى المماس بالمستوى المار بنقطة التماس موازياً لسطح (س' و ع) الاحداثي وكانت نقطة م' توجد عليه فيوجد اذ ذاك جميع نقطه ص' = ص' أو ص' - ص' = ٠ وتؤول معادلة (٣٦) حينئذ الى  $ع (س' - س') + ع (ع - ع') = ٠$  ولما كانت هذه المعادلة تبين النسب الواقعة بين بعدي س' و ع لاي نقطة من مستقيم م' تكون هي معادلة هذا المستقيم ويمكن وضعها هكذا

$ع - ع' = ع (س' - س') \dots \dots \dots (٣٧)$   
هذا اذا امعنت النظر فظهر لك ان معادلة السطح المنحني المفروض التي هي  $د (س' و ع) = ٠$  تؤول الى معادلة منحني م' اذا اعتبرت فيها ص' ثابتة فاذا أردنا الآن معرفة شرط تماس مستقيم م' بمنحني م' نراجع (بند ٧١) ومنه نتحقق انه يجب ان يكون مركزية  $(س' - س')$  من معادلة (٣٧) مساوياً لمقدار  $\frac{ع'}{ع}$  المستخرج

من معادلة المنحني م' ولا يفتق ان معادلة هذا المنحني هي معادلة السطح معتبراً فيها ص' ثابتة ومن ثم يكفي ان نؤخذ تناضل معادلة السطح المذكور ونستخرج منها  $\frac{ع'}{ع}$  لانه يعلم من بعد (بند ٥٢) ان الزم  $\frac{ع'}{ع}$  بين أن ص' اعبرت ثابتة في اخذ التناضل وينتج من ذلك انه بتشكيل س' و ص' هكذا س' و ص' بعد اجراء العملية يكون شرط تماس م' بالمنحني م' هكذا

$$- \frac{ع}{ع} = \frac{ع}{ع} \text{ أو } ع = - \frac{ع}{ع} \dots\dots (٣٨)$$

واذا رسمنا كذلك من نقطة م مستويا موازيا للمستوى (صه وع) الاحداثي فيقطع هذا المستوى السطح المفروض في منحنى م د ويقطع المستوى المماس في مستقيم م ك ويكون هذا المستقيم مماسا لمنحنى م د وجميع نقطه تكون متساوية البعد عن مستوى (صه وع) يعنى تكون اقياسها كلها متساوية فيكون  $س ه = س د$  أو  $س ه - س د = ٠$

ونؤول معادلة (٣٦) حينئذ الى المعادلة

$$ط (صه - صه) + ع (ع - ع) = ٠ \text{ التى يستخرج منها } ع - ع = - ط (صه - صه) \text{ وهذه المعادلة هى معادلة المستقيم م ك فىكون شرط تماس هذا المستقيم بالمنحنى م د بمساواة}$$

مكزركية صه - صه للمكرر  $\frac{ع}{ع}$  التفاضلى المستخرج من

$$\text{معادلة السطح المفروض يعنى انه يوجد } - \frac{ع}{ع} = \frac{ع}{ع} \text{ ومن ثم}$$

$$\text{يكون } ط = - \frac{ع}{ع} \dots\dots\dots (٣٩)$$

واذا وضعت مقادير ع و ط الميينة بمعادلتى (٣٨) و (٣٩) فى معادلة (٣٦) التى هذه المعادلة الى

$$- \frac{ع}{ع} (س ه - س د) - \frac{ع}{ع} (صه - صه) + ع (ع - ع) = ٠$$

ومن هذه يستخرج

$$ع - ع = \frac{ع}{ع} (س ه - س د) + \frac{ع}{ع} (صه - صه) \dots\dots (٤٠)$$

وهذه المعادلة هى معادلة المستوى المماس فى نقطة س ه و ص د وع

\* ٧٦ \* ولنبحث عن معادلة المستوى المماس بالكرة مثلاً ولذلك

نرمز لابعاد مركز الكرة بحروف  $هـ$  و  $و$  و  $ر$  فمعادلتها تكون

$$(س - هـ)^2 + (ص - و)^2 + (ع - ر)^2 = نق^2$$

ثم نعتبر  $صه$  ثابتة في هذه المعادلة وتأخذ التفاضل فيوجد

$$2(س - هـ)(دس) + 2(ص - و)(دص) + 2(ع - ر)(دع) = 0 \text{ ومنه يحدث}$$

$$\frac{دس}{دص} = \frac{ع - ر}{و - ص} \text{ وكذا نعتبر } سه \text{ ثابتة وتأخذ تفاضل معادلة}$$

الكرة المذكورة فيوجد

$$2(س - هـ)(دس) + 2(ص - و)(دص) + 2(ع - ر)(دع) = 0 \text{ ومنه يحدث}$$

$$\frac{دس}{دص} = \frac{ع - ر}{و - ص} \text{ ومعادلة السطح المماس للكرة في نقطة}$$

$سه$  و  $صه$  و  $عه$  تكون حيث

$$ع - سه = \frac{هـ - سه}{ع - سه} + \frac{و - سه}{ع - سه} + \frac{ر - سه}{ع - سه} = سه - سه$$

\* ٧٧ \* وإذا كان هذا السطح يمر بنهاية القطر الرأسى يوجد

$$سه = هـ \text{ و } سه = و \text{ و } سه = ع \text{ و } ر + نق = ع \text{ ونؤول}$$

معادلة السطح في هذه الحالة الى  $ع = ر + نق$  وهذه هي معادلة

المستوى الموازى لسطح  $(سه و سه)$  الاحداثى

\* ٧٨ \* معادلات الخط العمودى في نقطة  $سه$  و  $صه$  و  $عه$

يمكن حدها بسهولة من معادلة السطح المماس وبيان ذلك ان تقول حيث انه

يعلم من الهندسة التحليلية المسماة بالثلاثة ابعاد ان الشرط الواقع ليعكون

المستقيم الذى معادلته

$$(٤١) \begin{cases} س + ع = سه \\ س + و = سه \end{cases}$$

عمود على المستوى الذى معادلته

(٦١)\*

$$\text{ع} = \text{ط} + \text{ص} + \text{ع} + \text{ك} = (٤٢)$$

هو أن يوجد  $\text{ع} = \text{ط} + \text{ك}$

فإذا حولنا جميع حدود معادلة (٤٠) في الطرف الأول وطابقنا بعد ذلك حدودها بحدود معادلة (٤٢) يحدث لنا بمساواة ~~مكتر~~ ران كبات  $\text{ص} + \text{ص} + \text{ع} + \text{ع}$  بعضها

$$\text{ع} = \frac{\text{ع}}{\text{ع}} - \text{ط} = \frac{\text{ع}}{\text{ع}} - \text{ك} = ١$$

ويعلم من ذلك أنه يكون  $\frac{\text{ع}}{\text{ع}} = \text{ك}$  و  $\frac{\text{ع}}{\text{ع}} = \text{ط}$  في معادلات (٤١) يوجد

$$\text{ص} = \frac{\text{ع}}{\text{ع}} - \text{ع} + \text{ك}$$

$$\text{ص} = \frac{\text{ع}}{\text{ع}} - \text{ع} + \text{ك}$$

وحيث أن نقطة (ص و ع و ط) تحقق هذه المعادلات لأنها من جلة نقط المستقيم المستدل عليها يوجد أيضا

$$\text{ص} = \frac{\text{ع}}{\text{ع}} - \text{ع} + \text{ك}$$

$$\text{ص} = \frac{\text{ع}}{\text{ع}} - \text{ع} + \text{ك}$$

ويحذف  $\text{ك}$  و  $\text{ط}$  من هذه المعادلات الأربع يوجد

$$\text{ص} - \text{ص} = \frac{\text{ع}}{\text{ع}} - (\text{ع} - \text{ع})$$

$$\text{ص} - \text{ص} = \frac{\text{ع}}{\text{ع}} - (\text{ع} - \text{ع})$$

وهاتان المعادلتان هما معادلتا الخط العمودي في نقطة (س و ص و ع)

• (في الدوال التي تؤول الى  $\div$  باحد المقادير التي يأخذها المتغير) •

• ٧٩ • اذا آل كسر كسر  $\frac{ك}{د}$  الى  $\div$  باخذ متغير س  
مقدار ايرمز اليه بحرف  $\div$  مثلاً كان ذلك دليلاً على وجود مضروب مشترك  
هو س -  $\div$  أو (س -  $\div$ ) على جهة العموم لكميتي الكسر  
المفروض واذا اسقط هذا المضروب المشترك ان امكن حدث المقدار الحقيقي  
للكسر المفروض

ولنفرض لبيان ذلك ان س -  $\div$  يكون مضروباً في ك س م مرة  
وفي د س م مرة (ما لم يقتض الحال الى جعل م و د مساويين الى  
الوحدة او الى صفر) فيمكننا ان نضع

$$ك س = ع (س - \div) \text{ و } د س = ك (س - \div)$$

$$\text{ومنه يحدث } \frac{ك}{د} = \frac{ع}{ك} (س - \div)^{-1} \dots \dots \dots (٤٣)$$

وباختفاضل المعادلة الاولى وقسمة جميع حدودها بعد ذلك على (و س  
يوجد

$$\frac{ك \cdot و}{و س} = \frac{ع}{و س} (س - \div) + م ع (س - \div)^{-1}$$

ومن المشاهد ان مقدار  $\frac{ك \cdot و}{و س}$  يتركب من حدين يحتوي احدهما

على مضروب س -  $\div$  بأم صغر من أسه في الدالة المفروضة بواحد

واذا اخذنا المكرر التقاضلي لكمية  $\frac{ك \cdot و}{و س}$  شوهد بهذا المنوال انه يحتوي

على حد متبوع بكمية (س -  $\div$ ) وحد آخر متبوع بكمية (س -  $\div$ )<sup>-١</sup>

وحد

وحد ثالث متنوع بكمية  $(م - ٧)$  وهذا الحد الثالث يكون

$م (١ - م) ع (م - ٧)$  وبأدامة عملية أخذ التفاضل يتأهلان كل تفاضل مستجد يحتوى على كمية  $م - ٧$  بأحسن كاحصها في الدالة التي حدث منها هذا التفاضل بلا واسطة زائد احداً يحتوى على  $م - ٧$  بأصغر من ذلك الواحد وبهلم منه أنه بأخذ المكرران التفاضلية المتوالية يكون الحد المحتوى على أقل قوى  $م - ٧$  هو

$م ع (م - ٧)$  ..... في التفاضل الاول

و  $م (١ - م) ع (م - ٧)$  ..... في التفاضل الثاني

و  $م (١ - م) (١ - م) ع (م - ٧)$  في التفاضل الثالث

و  $م (١ - م) (١ - م) (١ - م) ع (م - ٧)$  في التفاضل النوى

واذن يكون المكرر التفاضلى بدرجة  $٧$  للكمية  $م$  هكذا

$$\frac{فا. م}{وا. م} = س (م - ٧) + س (م - ٧) + س (م - ٧) + م (١ - م) (١ - م) ع (م - ٧)$$

وما ذكر في شان  $م$  يمكن تطبيقه على  $د$  فبحدث منها

$$\frac{فا. د}{وا. د} = ع (د - ٧) + ع (د - ٧) + د (١ - د) ك (د - ٧)$$

وبحسبة هذين المكررين على بعضهما يوجد

$\frac{فا. م}{وا. م}$

$$\frac{س (م - ٧) + س (م - ٧) + س (م - ٧) + م (١ - م) (١ - م) ع (م - ٧)}{ع (د - ٧) + ع (د - ٧) + د (١ - د) ك (د - ٧)} \dots (٤)$$

\* ٨٠ \* وهنا تعتبر ثلاث حالات وهي  $\mathfrak{D} = \mathfrak{M}$  و  $\mathfrak{D} < \mathfrak{M}$  و  $\mathfrak{D} > \mathfrak{M}$

ففي الحالة الاولى وهي  $\mathfrak{D} = \mathfrak{M}$  ينزل كل من كميتي  $(\mathfrak{M} - \mathfrak{D})$  و  $(\mathfrak{M} - \mathfrak{D})$  الى الواحد اذا كان عدد التفاضلات المأخوذة وهو  $\mathfrak{R}$  مساويا  $\mathfrak{M}$  وتنزل كميات  $(\mathfrak{M} - \mathfrak{D})$  و  $(\mathfrak{M} - \mathfrak{D})$  و  $(\mathfrak{M} - \mathfrak{D})$  الخ و  $(\mathfrak{M} - \mathfrak{D})$  و  $(\mathfrak{M} - \mathfrak{D})$  الخ الى صفر بفرض  $\mathfrak{M} = \mathfrak{D}$  ويعلم من ذلك ان جميع حدود البسط والمقام تختف ماعدا الحد الاخير من كل منهما ومعادلة (٤٤) تنزل حينئذ الى

$$\frac{\mathfrak{M}^{\mathfrak{D}}}{\mathfrak{D}^{\mathfrak{D}}} = \frac{\mathfrak{M}^{\mathfrak{D}}}{\mathfrak{D}^{\mathfrak{D}}} = \frac{\mathfrak{M}^{\mathfrak{D}}}{\mathfrak{D}^{\mathfrak{D}}} = \frac{\mathfrak{M}^{\mathfrak{D}}}{\mathfrak{D}^{\mathfrak{D}}} = \frac{\mathfrak{M}^{\mathfrak{D}}}{\mathfrak{D}^{\mathfrak{D}}} = \frac{\mathfrak{M}^{\mathfrak{D}}}{\mathfrak{D}^{\mathfrak{D}}} = \frac{\mathfrak{M}^{\mathfrak{D}}}{\mathfrak{D}^{\mathfrak{D}}} = \frac{\mathfrak{M}^{\mathfrak{D}}}{\mathfrak{D}^{\mathfrak{D}}} = \frac{\mathfrak{M}^{\mathfrak{D}}}{\mathfrak{D}^{\mathfrak{D}}} = \frac{\mathfrak{M}^{\mathfrak{D}}}{\mathfrak{D}^{\mathfrak{D}}}$$

وفي الحالة الثانية وهي التي يكون فيها  $\mathfrak{D} < \mathfrak{M}$  تنزل كميتي  $(\mathfrak{M} - \mathfrak{D})$  الى الواحد اذا كان عدد التفاضلات المجرأة وهو  $\mathfrak{R}$  مساويا الى  $\mathfrak{D}$  وتكون أسس  $\mathfrak{D} - 1$  و  $\mathfrak{D} - 2$  و  $\mathfrak{D} - 3$  الخ و  $\mathfrak{M} - 1$  و  $\mathfrak{M} - 2$  و  $\mathfrak{M} - 3$  الخ للكميات ذات الحدين الاخيرة اكبر من  $\mathfrak{D} - 1$  فهي موجبة ويعلم من ذلك ان جميع هذه الكميات تنزل الى صفر بفرض  $\mathfrak{M} = \mathfrak{D}$  فتختف جميع الحدود المحتوية عليها حينئذ وتنزل معادلة (٤٤) الى

$$\frac{\mathfrak{M}^{\mathfrak{D}}}{\mathfrak{D}^{\mathfrak{D}}} = \frac{\mathfrak{M}^{\mathfrak{D}}}{\mathfrak{D}^{\mathfrak{D}}} = \frac{\mathfrak{M}^{\mathfrak{D}}}{\mathfrak{D}^{\mathfrak{D}}} = \frac{\mathfrak{M}^{\mathfrak{D}}}{\mathfrak{D}^{\mathfrak{D}}} = \frac{\mathfrak{M}^{\mathfrak{D}}}{\mathfrak{D}^{\mathfrak{D}}} = \frac{\mathfrak{M}^{\mathfrak{D}}}{\mathfrak{D}^{\mathfrak{D}}} = \frac{\mathfrak{M}^{\mathfrak{D}}}{\mathfrak{D}^{\mathfrak{D}}} = \frac{\mathfrak{M}^{\mathfrak{D}}}{\mathfrak{D}^{\mathfrak{D}}} = \frac{\mathfrak{M}^{\mathfrak{D}}}{\mathfrak{D}^{\mathfrak{D}}} = \frac{\mathfrak{M}^{\mathfrak{D}}}{\mathfrak{D}^{\mathfrak{D}}}$$

وهذا

وهذا يستدل على ان معادلة (٤٣) تؤول الى صفر حين يكون  $m < 0$   
 واما الحالة الثالثة وهى الاخيرة التى فيها  $m > 0$  فان جميع الحدود  
 تنحذف فيها ما عدا حد  $m(1-m)(2-m) \dots 0000$  (سـ-٧)  
 بأخذ عدد للتفاضلات الذى هو  $m$  مساويا الى  $m$  ويبقى حينئذ

$$\infty = \frac{m(1-m)(2-m) \dots 0000}{0!} = \frac{m(1-m)(2-m) \dots 0000}{0!} = \frac{m(1-m)(2-m) \dots 0000}{0!}$$

وهذا المقدار يدل على ان الطرف الثانى لمعادلة (٤٣) يصير غير مثته  
 فى الحالة التى يكون فيها  $m > 0$

\* ٨١ \* وتنتج هذه القاعدة مما سبق وهى متى يراد تعيين المقدار

الحقيقى لكسر  $\frac{0!}{0!}$  الذى يصير  $\div$  بأحد المقادير التى ياخذها المتغير

يؤخذ تفاضل كل من كبتى هذا الكسر على حدته ثم ينظر هل يؤول ناتجا

$\frac{0!}{0!}$  و  $\frac{0!}{0!}$  الى صفر بالمقدار الذى يجعل  $\frac{0!}{0!}$  آيلا الى

$\div$  اولا فان الا الى صفر اخذ المـ كـر التفاضلى لهما الى لكبتى  $\frac{0!}{0!}$

و  $\frac{0!}{0!}$  وينظر ايضا هل يؤول كل من النواتج الحادثة الى صفر

بالفرض المذكور اولا وهكذا تا دم العملية فان وجد بعد جملة عمليات ناتجان

لا يؤول كل منهما الى صفر بالفرض السابق فالكسر المتكون منهما يكون هو

المقدار الحقيقى للكسر المفروض واذا آل احدهما هو البسط الى صفر فالمقدار

الحقيقى للكسر المفروض يكون صفرا ويكون مقدار هذا الكسر غير محدود اذا

إل المقام وحده الى صفر

• (المثال الأول) •

• ٨٢ • المراد معرفة المقدار الحقيقي لكسر  $\frac{٢٧-٢}{٢-٢}$  الذي  
 يؤول الى  $\div$  بفرض  $٢ = ٢$  ولذلك نأخذ تفاضل كل من كيتي هذا  
 الكسر فيوجد  $\frac{٢٧-٢}{٢-٢}$  وحيث ان كيتي هذا الكسر الاخير لا يؤولان الى صفر  
 بفرض  $٢ = ٢$  فالمقدار الحقيقي لكسر  $\frac{٢٧-٢}{٢-٢}$  حين يفرض  
 $٢ = ٢$  يكون  $\frac{٢٧-٢}{٢-٢}$  وهو المطلوب

• (المثال الثاني) •

• ٨٣ • لمعرفة المقدار الحقيقي لكسر  $\frac{٢٧-٢}{٢-٢}$   
 حين يفرض  $٢ = ١$  الذي يجعل هذا الكسر ايلالا الى  $\div$  يؤخذ  
 تفاضل البسط والمقام كل منهما على حدته ثم تقسم النواتج على بعضها فيوجد  
 $\frac{٢٧-٢}{٢-٢}$  وحيث ان كلا من كيتي هذا الكسر الاخير يؤول الى  
 صفر بالفرض السابق الذي هو  $٢ = ١$  فيؤخذ التفاضل ثانيا فيحدث  
 $\frac{٢٧-٢}{٢-٢}$

ولما كان مقام هذا الكسر يؤول وحده الى صفر بفرض  $٢ = ١$  علم  
 من ذلك ان مقدار الكسر المفروض غير محدود

• (المثال الثالث) •

• ٨٤ • يفرض كسر  $\frac{٢٧-٢}{٢-٢}$  الذي يؤول الى  $\div$  بفرض  
 $٢ = ٠$  فيؤخذ تفاضل كل من البسط والمقام على حدته فيؤول هذا  
 الكسر الى  $\frac{٢٧-٢}{٢-٢}$

وهو كسر يؤول الى  $\div$  ولا تؤول كيتاه الى صفر يجعل

بـ = ٠ فيعلم من ذلك ان المقدار الحقيقي للكسر المقروض حين يفرض  
 بـ = ٠ هو لود - لود وكية بـ - ٠ أو بـ  
 تكون هي المضروب المشترك لكيتي ذلك الكسر ولاظهار هذا المضروب  
 في البسط الذي هو بـ - بـ تنظر أنه يوجد من بعد (بند ٣٧) ان

$$١ = \frac{١}{١} + \frac{٢}{٢ \times ١} + \frac{٢}{٢ \times ٢ \times ١} + \frac{٢}{٢ \times ٢ \times ٢ \times ١} + \dots$$

$$و \quad ١ = \frac{١}{١} + \frac{٢}{٢ \times ١} + \frac{٢}{٢ \times ٢ \times ١} + \frac{٢}{٢ \times ٢ \times ٢ \times ١} + \dots$$

وبطرح هاتين المعادلتين من بعضهما ما يوجد

$$١ - ١ = \frac{٢}{٢ \times ٢ \times ٢ \times ١} + \frac{٢}{٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ١} + \dots$$

وهذا يشاهد وجوده مضروب بـ في بـ - بـ

\* ٨٥ \* حيث ان القاعدة التي ذكرناها لايجاد المقدار الحقيقي للكسر  
 الذي يؤول الى ÷ بأحد المقادير التي يأخذها المتغير مؤسسة على فرضية  
 م و ٥ عددين صحيحين فلا يمكن استعمالها في الحالات التي تكون فيها  
 هاتان الكيتان كسورا اذ لا يمكن الوقوف على حد كذا بـ - بـ  
 يكون مرفوعا الى أس صفر ومن ثمة لا يمكن تخليص المضروب المشترك من كيتي  
 الكسر المقروض وامقاطه منهما  
 ولنفرض لعمومية هذه الطريقة أن

$$\frac{١}{١} = \frac{١}{١} + \frac{٢}{٢ \times ١} + \frac{٢}{٢ \times ٢ \times ١} + \frac{٢}{٢ \times ٢ \times ٢ \times ١} + \dots$$

وان كيات م و ب و ٥ و ٥ و ٥ و ٥ موجبة  
 ومتزايدة فهذا الكسر يؤول الى ÷ بوضع بـ = بـ ويمكن ان تغير  
 كية بـ بكية بـ + ه عوضا عن تغييرها بكية بـ فقط لكن

بعد انتهاء العملية نفرض  $ه = ٠$  والناتج الحادث يكون كالناتج من تغيير  $س$  بكمية  $ز$  من أول وهلة ونجد حينئذ

$$\begin{aligned} \text{كسر} &= \frac{ح ه + ك ه + ل ه + ٠ \dots \dots \dots الخ}{ح ه + ك ه + ل ه + ٠ \dots \dots \dots الخ} \quad (٤٥) \\ \text{دس} & \end{aligned}$$

وباعتبار كون  $ز$  و  $د$  يسكونان اصغرا لأسس الداخلة في هاتين المتسلسلتين يمكن وقوع هذه الثلاث حالات

$$د < ز \quad \text{و} \quad د = ز \quad \text{و} \quad د > ز$$

ففي الحالة الأولى اذا قسمت كيتا كسر (٤٥) على  $ه$  يحدث

$$\begin{aligned} \text{كسر} &= \frac{ح ه + ك ه + ل ه + ٠ \dots \dots \dots الخ}{ح ه + ك ه + ل ه + ٠ \dots \dots \dots الخ} \quad (٤٦) \\ \text{دس} & \end{aligned}$$

وحيث ان  $د < ز$  فرضا فعدد  $ز - د$  يكون موجبا ومن باب أولى تكون كيات  $ب - د$  و  $و - د$  الخ و  $ب - د$  و  $و - د$  الخ موجبة كذلك لان  $د$  و  $ب$  و  $و$  الخ و  $د$  و  $ه$  و  $و$  الخ متزايدة واذا جعلنا الآن  $ه = ١٠$  انخذت جميع حدود الطرف الثاني لمعادلة (٤٦) ماعدا  $ح$  ويعلم من ذلك ان هذه المعادلة تؤول الى

$$٠ = \frac{٠}{ح} = \frac{\text{كسر}}{\text{دس}}$$

وفي الحالة الثانية وهي التي يكون فيها  $د = ز$  يؤول حد  $ح ه$

الى  $ح ه = ح$  ويعلم من ذلك انه حين يجعل  $س = ز$  تؤول معادلة (٤٦) الى  $\frac{ح}{ح}$

وفي الحالة الثالثة وهي التي فيها  $د > ز$  تقسيم كيتا كسر (٤٥) على



ثم تجري عليه العمليات اللازمة لمعرفة مقداره الحقيقي حيث انه قد آل الى ÷  
 • ٨٨ • وبالجملة متى جعل فرض م = ٠ احد مضروبى  
 حاصل ضرب م ÷ آىلا الى صفرو جعل المضروب الآخر غير منته واريد  
 معرفة المقدار الحقيقى لهذا الحاصل يحول الحاصل المذكور الى صورة كسر  
 بالـ كيفية الاتية وهى ان يفرض أولاً أن حاصل الضرب المقروض يكون  
 م × ÷ وان مضروب م هو الذى يصير صفرا بفرض م = ٠  
 ومضروب ÷ يصير غير منته ثم يوضع هذا الحاصل هكذا

$$م \times \frac{1}{\div} = \frac{1}{\div}$$

ولما كان فرض م = ٠ يجعل مضروب ÷ غير منته لزم ان  
 يكون  $\frac{1}{\div} = ٠$  ويقول حاصل الضرب السابق حينئذ الى ÷ فتجربى  
 عليه العملية السابقة

• (فى النهايات الكبرى والصغرى للدوال التى بمتغير واحد) •

• ٨٩ • يمكن اعطاء كمية ه فى متسلسلة تباور مقدارا بحيث يصير  
 اى حد يراد من حدودها اكبر من حاصل جمع الحدود التى تليه وبيان ذلك  
 نكتب المتسلسلة وهى

$$صه + \frac{واصه}{واسه} + \frac{واصه}{واسه} + \frac{واصه}{واسه} + \frac{واصه}{واسه} + \frac{واصه}{واسه} + \dots$$

وقول اذا اردنا ان يكون حد  $\frac{واصه}{واسه}$  مثلا اكبر من حاصل جمع

الحدود التى تليه نضع جزء المتسلسلة المتقدم من ابتداء هذا الحد هكذا

$$\left( \frac{واصه}{واسه} + \frac{واصه}{واسه} + \frac{واصه}{واسه} + \frac{واصه}{واسه} + \frac{واصه}{واسه} + \dots \right) < \frac{واصه}{واسه}$$

لكنه بفرض ه = ٠ ينعدم جزء المتسلسلة المتقدم من ابتداء هذا الحد هكذا

فن نمتة يمكن اخذ كمية ه صغيرة جدا بتقاربها من صفري يصير هذا الجزء صغيرا

بحسب الارادة وبعلم من ذلك انه يمكن اعطاء كمية ه مقداراً بحيث يكون

ذلك الجزء اصغر من كمية  $\frac{واصة}{واسر}$  التي ليست محتوية على ه ولكن ع

ومن المأثور الى حاصل جمع  $\frac{واصة}{واسر} + \frac{واصة}{واسر} + \frac{واصة}{واسر} + \dots$  الخ

في هذه الحالة تتوول متسلسلة (٤٧) الى

$\left( \frac{واصة}{واسر} + ع \right)$  ه وحيث انه يوجد

$\frac{واصة}{واسر} < ع$  بضرب الطرفين في ه يحدث

$\frac{واصة}{واسر} < ع ه$  او

$\frac{واصة}{واسر} < ه \left( \frac{واصة}{واسر} + \frac{واصة}{واسر} + \frac{واصة}{واسر} + \dots \right) ه$  او

$\frac{واصة}{واسر} < ه \left( \frac{واصة}{واسر} + \frac{واصة}{واسر} + \frac{واصة}{واسر} + \dots \right) ه$

وهذا ما اردنا اثباته وبمثله يبرهن على اى حد بالنسبة لجمع ما يليه

• ٩٠ • لكن  $ص = د$  مع معادلة بمتغيرين فيمكن دائماً

اعتبار هذه المعادلة كمعادلة منح رأسيات هي المقادير المختلفة للدالة ص

ويقال ان دالة ص هذه في نهايتها الصغرى متى مالت للزيادة بعد تناقصها

شياً فشيأ ومثاله منحنى م-ع (شكل ٩) الذي معادلته ص

$ص = ٦ + دسر$  فانه يشاهد ان رأسياته التي هي م-ع و م-ع ٠٠٠ الخ

تأخذ في النقصان الى نقطة - ومن ابتداء هذه النقطة تأخذ الرأسيات

ك-د و ك-د ٠٠٠ الخ في الزيادة وعلى هذا يكون الرأسى ا-ب هو

النهاية الصغرى للدالة ص

• ٩١ • ويقال ايضا ان الدالة  $\text{صه}$  أتت الى نهايتها الكبرى متى انتهت بعد تزايدها الى نقطة تأخذ في النقص من ابتدائها ويكفيك (شكل ١٠) مثلا اذ رأيت منحنى  $\text{دو}$  الذي معادلته  $\text{صه} = \text{هه}$  —  $\text{دسه}$  المتسببه تأخذ في النقص من ابتداء نقطة  $\text{د}$  من الجانبين فرأيت ان فيه هو النهاية الكبرى لدالة  $\text{صه}$

• ٩٢ • وهناك منحنيات ليس لها الانهاية كبرى فقط ومنحنيات ليس لها الانهاية صغرى ومنحنيات فيها النهايتان ومنحنيات ليس لها نهايات بالكلية فان منحنى  $\text{م-هه}$  (شكل ٩) الذي معادلته  $\text{صه} = \text{د} + \text{دسه}$  لا توجد له نهاية كبرى لانه يعلم من بعد معادلته ان رأسياته تأخذ في التزايد ابدا

ودائرة  $\text{د-د}$  (شكل ١١) التي معادلتها  $\text{نق} = (\text{صه} - \text{هه}) + (\text{سه} - \text{و})$  توجد لها النهايتان الكبرى والصغرى متحدتين في افاق  $\text{ح}$  واكبرهايتين النهايتين  $\text{دع}$  واصغرها  $\text{ح-}$

• ٩٣ • متى توجد نهاية كبرى او صغرى للدالة  $\text{صه}$  التي بمتغير واحد رمزه  $\text{سه}$  فتعين هذه النهاية اذا علم الافاق الموافقة لها لانه اذا علم مقدار  $\text{سه}$  الموافق لنهاية كبرى او صغرى للمحنى المستدل عليه بمعادلة  $\text{صه} = \text{دسه}$  وكان ذلك المقدار  $\text{د}$  مثلا يكفي ان تجعل  $\text{سه} = \text{د}$  في معادلة  $\text{صه} = \text{دسه}$  ليكون مقدار  $\text{صه}$  الحادث منها هو النهاية الكبرى او الصغرى المطلوبة

• ٩٤ • وليكن  $\text{صه} = \text{دسه}$  رأسي هو  $\text{م ح}$  (شكل ١٢) ويكون في نهايته الكبرى فاذا اخذنا في  $\text{ح}$  زيادة  $\text{هه}$  المتينة بنقط  $\text{ح-}$  وقطع  $\text{ح ح'}$  =  $\text{هه}$  ايضا فالشروط الواقعة ليكون  $\text{م ح}$  نهاية كبرى تكون

$$\text{ح' م} > \text{م ح} \text{ و } \text{ح' م'} > \text{م ح} \text{ أو}$$

د (س + هـ) > ك (س - هـ) > ك (س)  
وبالعكس اذا كان ح م (شكل ١٣) نهاية صغرى وكان س هـ هو الاقل  
ا ح الموافق لهذه النهاية وقطع ح ع = ح ع = هـ فشرط كون  
ح م نهاية صغرى تكون

$$ح م < ح م' و ح م' < ح م او$$

$$ك (س + هـ) < ك (س) و ك (س - هـ) < ك (س)$$

ويعلم من ذلك انه متى تكون الدالتان ك (س + هـ) و ك (س - هـ)  
معاصرتين ك (س) يوجد للمخفى نهاية كبرى ومتى يكونان معاكبرتهما  
يوجد للمخفى نهاية صغرى واذا كانت احدى هاتين الدالتين اكبر والاخرى  
اصغر من ك (س) فلا توجد نهاية كبرى ولا صغرى

\* ٩٥ \* ولنبحث عن هذه الشروط فى اى الحالات تقع فنقول من  
المعلوم انه يوجد من قضية تيلور

$$ك (س + هـ) = ص + \frac{ص}{واس} + \frac{واس}{واس^2} + \frac{واس^2}{واس^3} + \frac{واس^3}{واس^4} + \dots (٤٨)$$

وبتغيير + هـ بكمية - هـ فى هذا الدستور يحدث

$$ك (س - هـ) = ص - \frac{ص}{واس} + \frac{واس}{واس^2} - \frac{واس^2}{واس^3} + \frac{واس^3}{واس^4} - \dots (٤٩)$$

ولاجل ان تكون ص = ك (س) نهاية كبرى او صغرى يلزم ان يكون  
هذان الحلان معاصرا او اكبر من ص كما فى البند المتقدم لكن لا يقع ذلك

$$الا اذا كان \frac{واس}{واس} يساوى صفرا لانه اذا لم يكن \frac{واس}{واس} = 0$$

امكن ان يعطى الى كمية هـ مقدار بحيث يكون \frac{واس}{واس} هـ اكبر من

حاصل الجمع الجبرى للحدود التى تليه فى كل من المتسلسلتين وبهذا تكون اشارة

حد  $\frac{واصة}{واسر}$  ه وحده كاشارة الناتج من ارتباطه بجميع الحدود التي تليه  
 فاذا كان هذا الحد موجبا في احد حل (٤٨) و (٤٩) فذلك الحل  
 يكون اكبر من صه ويكون اصغر من صه اذا كان الحد المذكور  
 وهو  $\frac{واصة}{واسر}$  ه سلبيا وحيث ان اشارة حد  $\frac{واصة}{واسر}$  ه متعاكسة  
 في هذين الحلين يعني موجبة في احدهما وسالبة في الاخر فينتج من ذلك انه  
 لا بد وان تكون احدى كيتي ك (صه + ه) و ك (صه - ه) اكبر  
 من ك صه والاخرى اصغر

وقد ظهر من هذا انه اذا لم يكن  $\frac{واصة}{واسر}$  صفرا فلا توجد نهاية  $\equiv$  كبرى

ولا صغرى اما اذا كان  $\frac{واصة}{واسر} = 0$  فان حل (٤٨) و (٤٩)  
 يتوولا ن حينئذ الى

$$ك (صه + ه) = صه + \frac{واصة}{واسر} \frac{واصة}{واسر} + \frac{واصة}{واسر} \frac{واصة}{واسر} + \dots الخ$$

$$ك (صه - ه) = صه - \frac{واصة}{واسر} \frac{واصة}{واسر} + \frac{واصة}{واسر} \frac{واصة}{واسر} - \dots الخ$$

واشارة الحدود التي تلي صه تتعلق في هذه الحالة باشارة  $\frac{واصة}{واسر}$  اذا

اخذت كية ه مقدارا صغيرا كافيا لان يكون  $\frac{واصة}{واسر}$  ه اكبر من

حاصل الجمع الجبري للحدود الاتية بعده وحيث ان اشارة  $\frac{واصة}{واسر}$  متحدة

في الحلين فاذا كانت هذه الاشارة هي الزائد فالتسا (صه + ه) و (صه - ه)

تكونان

تكونان اكبر من كرسه وتكون كرسه في هذه الحالة نهاية صغرى وكذا اذا كان  $\frac{واصه}{واسه}$  سالبا شوهد أن كرسه تكون نهاية كبرى

\* ٩٦ \* ولتقيم هذه القضية تنبه انه قد يكون  $\frac{واصه}{واسه}$  صفرا

$$\text{وجود} = \frac{واصه}{واسه} = ١٠$$

وفي هذه الحالة لا توجد نهاية كبرى ولا صغرى الا اذا كان  $\frac{واصه}{واسه} = ١٠$

ايضا لان اشارة الحدود التي تلي صه تكون عند ذلك متعلقة باشارة  $\frac{واصه}{واسه}$  حين تؤخذ ه صغيرة جدا ويثبت انه اذا كان  $\frac{واصه}{واسه}$  موجبا تكون كرسه نهاية صغرى واذا كان سلبيا تكون نهاية كبرى وهم جرا

وعلى العموم متى يكون المكرر التفاضلي الاول الذي لم ينحذف بدرجة مزدوجة فانه يوجد نهاية صغرى اذا كان موجبا ونهاية كبرى اذا كان سالبا  
(المثال الاول) \*

\* ٩٧ \* لمعرفة نهايات هذه الدالة  $٧ - ٥س + ٣س^٢$  نضع  
اولا  $صه = ٧ - ٥س + ٣س^٢$   
ثم نأخذ التفاضل ونقسم على  $واسه$  فيجد

$$\frac{واصه}{واسه} = ٣ - ٥ + ٦س$$

$$\frac{واصه}{واسه} = ١٢$$

وبما يجب مقدار  $\frac{واصه}{واسه}$  يستدل على انه يوجد للدالة المقروضة نهاية صغرى

ولتعيين الاتفاق الموافق لهذه النهاية تساوى مقدار  $\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}}$  بصفر فيحدث

منه  $\text{سه} = \frac{3}{4}$  وإذا وضع هذا المقدار في مقدار  $\text{سه}$  بدلا عن  $\text{سه}$  حدث  $\text{سه} = 7 - \frac{3}{2}$  وهذا المقدار هو مقدار النهاية الصغرى المطلوبه

\*(المثال الثانى)\*

\* ٩٨ \* لكن  $\frac{4}{7} + \text{دسه} - \text{هسه}$  كية يراد معرفة نهايتها فنضع

$\text{سه} = \frac{4}{7} + \text{دسه} - \text{هسه}$  ثم نأخذ التفاضل ونقسم على  $\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$  فيجد

$$\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = \frac{3}{4} - \text{دسه} \quad \text{و} \quad \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = -\text{هسه} - \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = -\text{هه}^2$$

وحيث ان  $\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$  سالب فيوجد للدالة المقروضة نهاية كبرى يستخرج

الاتفاق الموافق لهما من معادلة  $\text{دسه} - \text{هسه} = 0$  فيوجد

$\text{سه} = \frac{3}{4}$  وبوضع هذا المقدار في مقدار  $\text{سه}$  بدلا عن  $\text{سه}$  يوجد

$\text{سه} = \frac{4}{7} + \frac{3}{4}$  وهو مقدار النهاية الكبرى المراد ايجادها

\*(المثال الثالث)\*

\* ٩٩ \* لكن ايضا معادلة  $\text{سه} = 3\text{دسه} - \text{دسه} + \text{هه}$

فنأخذ التفاضل ونقسم على  $\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$  فيجد كما تقدم

$$\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = 9\text{دسه} - \text{دسه} \quad \text{و} \quad \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = 18\text{دسه}$$

ثم تساوى مقدار المكثر التفاضلى  $\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$  بصفر فيوجد

$$9\text{دسه} - \text{دسه} = 0 \quad \text{ومنه يستخرج}$$

$$\text{سه} = \frac{3}{4}$$

وإذا

واذا وضعنا مقدارى  $\frac{واصة}{واسر}$  على التوالي بدلا عن

$$\frac{واسر}{واسر} = 1 \text{ و } \frac{واسر}{واسر} = 1 \text{ و } \frac{واسر}{واسر} = 1$$

وبهذا يستدل على انه يوجد للدالة المقروضة نهاية صغرى مواقة الى افق

$$\frac{واسر}{واسر} = 1 \text{ و } \frac{واسر}{واسر} = 1 \text{ و } \frac{واسر}{واسر} = 1$$

وبوضع هذه المقادير فى مقدار  $\frac{واسر}{واسر}$  يوجد أولا  $\frac{واسر}{واسر} = 1$

$$\frac{واسر}{واسر} = 1 \text{ و } \frac{واسر}{واسر} = 1 \text{ و } \frac{واسر}{واسر} = 1$$

وهو مقدار النهاية الصغرى ويوجد ثانيا  $\frac{واسر}{واسر} = 1$

$$\frac{واسر}{واسر} = 1 \text{ و } \frac{واسر}{واسر} = 1 \text{ و } \frac{واسر}{واسر} = 1$$

وهو مقدار النهاية الكبرى

\*(تطبيق نظريات على حل جملة اسئلة)\*

\*(المسئلة الاولى)\*

\* ١٠٠ \* لنا ان تقسم عددا مفروضا الى قسمين بشرط ان يكون

حاصل ضربهما اعظم ما يمكن

ولاجل ذلك نفرض العدد  $x$  واحد القسمين المطلوبين  $\frac{واسر}{واسر}$  فالتقسيم

الآخر يكون  $1 - x$  وكية  $x$  تكون هى الكمية التى

يراد معرفة نهايتها الكبرى فنضع

$$\frac{واسر}{واسر} = x \text{ و } \frac{واسر}{واسر} = 1 - x$$

ثم نأخذ التفاضل ونقسم على  $\frac{واسر}{واسر}$  فيوجد

$$\frac{واسر}{واسر} = x \text{ و } \frac{واسر}{واسر} = 1 - x$$

وحيث ان  $\frac{واسر}{واسر}$  سالب فيتحقق انه يوجد نهاية كبرى بخلاف ما اذا كان

$$\frac{واسر}{واسر} = x \text{ و } \frac{واسر}{واسر} = 1 - x$$

هذا المقدار موجبا فان المسئلة تكون غير ممكنة ثم انه بمساواة مقدار  $\frac{واسر}{واسر}$

$$\frac{واسر}{واسر} = x \text{ و } \frac{واسر}{واسر} = 1 - x$$

بصفر يحدث منه  $\frac{واسر}{واسر} = 1$  ويعلم من ذلك انه يجب قسمة العدد المقروض

قسمين متساويين ليكون حاصل ضربهما اعظم ما يمكن او نهاية كبرى

• (المسألة الثانية) •

• ١٠١ • لسان نعين اعظم الاسطوانة الممكّن رسمها داخل مخروط قائم

ولذلك نرمز لخط ع و الذي هو ارتفاع المخروط (شكل ١٤) بحرف ح ونرمز بحرف د لخط او الذي هو نصف قطر القاعدة ثم نرمز بحرف س لخط ع د الذي هو بعد رأس المخروط عن مركز الدائرة العليا للأسطوانة فيحدث لسان من تشابه مثلثي ع ا و و ع ه د هذه التناسبة

$$ع و : او :: ع د : ه د \text{ أو}$$

$$ح : د :: س : ه د \text{ ومنها يحدث}$$

$$ه د = \frac{د س}{ح}$$

ولنفرض ان ط تكون نسبة القطر الى محيطه فمساحة دائرة ه ع ف التي نصف قطرها يساوي د س تكون  $\frac{ط د س}{ح}$  وبضرب هذه المساحة في ارتفاع الاسطوانة الذي هو ح - س يحدث حجم تلك الاسطوانة ويكون ذلك الحجم  $\frac{ط د س}{ح} (ح - س)$  وهذه الكمية تكون هي التي يراد ايجاد نهايتها الكبرى فتساويها بحرف ص ل يحدث

$$ص = \frac{ط د س}{ح} (ح - س) \text{ ثم نأخذ التفاضل ونقسم على (ص) فيوجد}$$

$$\frac{ص}{ص} = \frac{ط د}{ح} (٢ - ٣ س) \text{ و}$$

$$\frac{ص}{ص} = \frac{ط د}{ح} (٢ - ٦ س)$$

وبمساواة مقدار  $\frac{ص}{ص}$  بصفر يوجد

$$\frac{ط د}{ح} (٢ - ٦ س) = ٠ \text{ أو}$$

\*(٧٩)\*

٢١ مـ - ٣ مـ = ٠ ومنها يستخرج

$$\text{مـ} = ٠ \text{ و } \text{مـ} = \frac{٢٢}{٣}$$

نقدار مـ = ٠ لا يوافق نهاية كبرى لان  $\frac{\text{واصة}}{\text{واسـ}}$  يؤول به الى

$\frac{٢٢}{٣}$  وهو عدد موجب فيوافق حينئذ الى نهاية صغرى وبالحقيقة متى يفرض مـ = ٠ تؤول الاسطوانة الى محور المخروط (فانه كلما ارتفعت

الاسطوانة قل نخز حجمها) ومقدار مـ =  $\frac{٢٢}{٣}$  يكون هو الموافق

للمسئلة وحده لان مقدار  $\frac{\text{واصة}}{\text{واسـ}}$  يؤول به الى  $\frac{٢٢}{٣}$  وهو عدد

سالب فاذا طرح عـ = مـ =  $\frac{٢}{٣}$  عـ و من ارتفاع المخروط بقي

وـ =  $\frac{١}{٣}$  عـ و يعلم من ذلك ان حجم الاسطوانات الممكن رسمها داخل

مخروط قائم ما كان ارتفاعها ثلث ارتفاع ذلك المخروط

\*(المسئلة الثالثة)\*

\* ١٠٢ \* لسان تقسم مستقيم ا- (شكل ١٥) الى قسمين

اـ و بـ بشرط ان يكون حاصل ضرب اـ بـ نهاية كبرى

ولذلك نرمز بحرف جـ لخط ا- الكلى وبحرف مـ لقسم جـ

فالمعادلة التي ينتهي اليها ليؤخذ تفاضلا تكون

جـ = مـ (جـ - مـ) ثم يوجد باخذ التفاضل والقسم على (واسـ)

$$\frac{\text{واصة}}{\text{واسـ}} = \frac{٣ مـ - ٤ مـ}{٣ مـ - ٤ مـ} \text{ و}$$

$$\frac{\text{واصة}}{\text{واسـ}} = \frac{٦ مـ - ١٢ مـ}{٦ مـ - ١٢ مـ}$$

وبمساواة مقدار  $\frac{\text{واصة}}{\text{واسـ}}$  بصغرى يخرج منه مـ = ٠ او مـ =  $\frac{٢٢}{٤}$

والمقدار الثاني لمجهول  $\text{سم}$  هو الذي يوافق المسئلة فقط لان مقدار  $\frac{\text{واصة}}{\text{واسر}}$

يقول به الى ناتج سالب وهو  $-\frac{٢٩}{٤}$

\* ١٠٣ \* وليتنبه انه متى يوجد مضروب ثابت موجب في مقدار

مكرر  $\frac{\text{واصة}}{\text{واسر}}$  التفاضلي يمكن اسقاط هذا المضروب لانه اذا وجدنا  $\frac{\text{واصة}}{\text{واسر}}$

$= \text{ح دسر}$  استخراجنا منه  $\frac{\text{واصة}}{\text{واسر}} = \text{ح} \frac{\text{واسر}}{\text{واسر}}$  وحيث

كانت هذه المعادلة الاخيرة لانقيدها الا لبيان اشارة مقدار  $\frac{\text{واصة}}{\text{واسر}}$  وهذه

الاشارة لاتعلق الا باشارة  $\frac{\text{واسر}}{\text{واسر}}$  لان  $\text{ح}$  مضروب ثابت موجب

يعلم من ذلك انه يمكن اسقاط مضروب  $\text{ح}$  من هذه المعادلة وكذا يمكن اسقاطه

من معادلة  $\frac{\text{واسر}}{\text{واسر}} = \text{ح دسر}$  لانه حيث كان اللازم مساواة الطرفين

التالي لهذه المعادلة بصفر ليس استخراج منها  $\text{ح دسر} = ١٠$

تحدث  $\text{دسر} = ٠$  وينتج من ذلك انه يمكن اسقاط الثابتة

• (المسئلة الرابعة) •

\* ١٠٤ \* المراد تعيين الاناء الاسطوانى الذى يسع كمية معلومة الحجم

من الماء ويكون سطحه الداخلى اصغرا ما يمكن ولذلك

نرمز لحجم الماء المعلوم بحرف  $\text{ح}$  ونصف قطر قاعدة الاسطوانة بحرف

$\text{سم}$  فكمية  $\text{طسر}$  تكون هي مساحة قاعدة هذه الاسطوانة وحيث انه

بضرب الارتفاع فى مساحة القاعدة يحدث حجم الاسطوانة يوجد

ارتفاع الاسطوانة  $\times \text{طسر} = \text{ح}$  ومنه يستخرج

ارتفاع الاسطوانة  $= \frac{\text{ح}}{\text{طسر}}$

وبضرب

وبضرب هذا الارتفاع في محيط القاعدة الذي هو ٢ ط س ه يوجد

$$\frac{2}{\text{ط س ه}} = 2 \times \frac{2}{\text{ط س ه}}$$

وهذا الحاصل بين مساحة السطح المخدب للاسطوانة فاذا اضيف عليه كمية

ط س ه التي هي مساحة قاعدة تلك الاسطوانة يحدث

$\frac{2}{\text{ط س ه}} + \text{ط س ه}$  وهذه الكمية تكون هي التي يراد معرفة نهايتها الصغرى

فنضع لاجل ذلك

$$\text{ص ه} = \frac{2}{\text{ط س ه}} + \text{ط س ه} \text{ فيحدث منه}$$

$$\frac{\text{وا ص ه}}{\text{وا س ه}} = \frac{2}{\text{ط س ه}} + \text{ط س ه} \text{ و}$$

$$\frac{\text{وا ص ه}}{\text{وا س ه}} = \frac{2}{\text{ط س ه}} + \text{ط س ه}$$

ثم نساوي مقدار  $\frac{\text{وا ص ه}}{\text{وا س ه}}$  بصفر فيحدث منه

$$\frac{2}{\text{ط س ه}} = \text{ص ه}$$

وحيث ان هذا المقدار يوافق لنهاية صغرى لانه يجعل  $\frac{\text{وا ص ه}}{\text{وا س ه}}$  موجبا يعلم

من ذلك ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة المطلوبة يساوي  $\frac{2}{\text{ط س ه}}$  واذا وضع

هذا المقدار في الكمية الميئة مقدار الارتفاع يوجد

$$\text{ارتفاع الاسطوانة} = \frac{\frac{1}{\frac{2}{\text{ط س ه}}}}{\frac{1}{\frac{2}{\text{ط س ه}}}} = \frac{2}{\text{ط س ه}} = \frac{\text{ط س ه}}{\frac{2}{\text{ط س ه}}}$$

وتجربى هذه المسئلة في عمل المدافع لانه يقال

المعلوم مقدار من البارود والمراد معرفة الانساع اللازم لها ونرى ان هذه الخزانة اصغر ما يكون وتطر  
ان هذه المسئلة تنزل الى تعيين اصغر السطوح التي تأخذها الخزانة  
وبالنظر الى ما سبق يعلم انه ينبغي ان يكون نصف قطر قاعدتها مساويا الى  
ارتفاعها

• (المسئلة الخامسة) •

• ١٠٥ • نريد ان نرسم مخروطا داخل كرة بشرط ان يكون سطحه  
المحذب اكبر ما يكون بالنسبة للمخروط الممكن رسمها داخل هذه الكرة  
ولذلك نفرض ان نصف دائرة ام - (شكل ١٦) تدور حول محور  
ا - فيحدث وتر ام في هذه الدائرة مخروطا ارتفاعه اح ونصف قطره  
قاعدته م ح ومساحة السطح المحذب لهذا المخروط تكون مساوية الى  
محيط ح م  $\times$  ام  $\frac{1}{2}$  =  $2 \times$  ح م  $\times$  ام  $\frac{1}{4}$  =  $2 \times$  ح م  $\times$  ام  
فريد الان تعيين ح م و ام ولذلك نفرض ان ا - = ٢٢  
و ا ح = م فيحدث من توسط ح م في التناسب بين ا ح و م ح  
هذه التناسبة

$$م : م :: م : ٢٢ - م \text{ ومنها يحدث}$$

$$م = \sqrt{٢٢م - م^2}$$

وكذا من توسط ام في النسبة بين ا ح و ا - يوجد

$$م : ام :: ام : ٢٢ \text{ ويحدث من ذلك}$$

$$ام = \sqrt{٢٢م}$$

وبوضع هذه القادير عوضا عن ح م و ام في الكمية التي تبين السطح  
المحذب للمخروط يوجد

$$\text{السطح المحذب للمخروط} = 2 \times \sqrt{٢٢م - م^2} \times \sqrt{٢٢م} = 2 \times \sqrt{٢٢م - م^2} \times \sqrt{٢٢م}$$

وبالرمز بحرف م هذه الكمية يكون

$$م = 2 \times \sqrt{٢٢م - م^2} \times \sqrt{٢٢م}$$

ثم يجري التفاضل بناء على (بند ١٠٣) فيكون

$$\frac{\text{واحد} - \frac{\text{واحد} - \text{واحد}}{\text{واحد} - \text{واحد}}}{\text{واحد} - \text{واحد}} = \frac{\text{واحد} - \text{واحد}}{\text{واحد} - \text{واحد}}$$

يكون

$$(٥٠) \dots\dots\dots \frac{\text{واحد} - \text{واحد}}{\text{واحد} - \text{واحد}} = \frac{\text{واحد} - \text{واحد}}{\text{واحد} - \text{واحد}}$$

ولاجل ان يكون هذا المقدار مساويا الى صفر يوضع

$$\text{واحد} - \text{واحد} = ٠ \text{ فيستخرج منه}$$

$$\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}} = \text{واحد}$$

وهذا المقدار يوافق نهاية كبرى لانه يجعل  $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$  سالبا

\* ١٠٦ \* وقبل البحث عن تعيين مقدار  $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$  نشرح طريقة

يختصر بها الحساب في بعض الحالات وليتأمل أولا انه اذا الت دالة لكمية  
 الى صفر بمقدار أخذ متغير  $\text{واحد}$  فلا يلزم منه ان يكون  
 مكررها التفاضلي صفرا ايضا فان المكرر التفاضلي  $\text{واحد} - \text{واحد} = ٠$  للدالة  
 $\text{واحد} - \text{واحد} = ٠ + ٦$  التي تؤول الى صفر بفرض  $\text{واحد} = ٢$   
 أو  $\text{واحد} = ٣$  لا يؤول الى صفر بهذه الفروضات

\* ١٠٧ \* قد يمكن في بعض الاوقات اختصار العمليات المستعملة لمعرفة  
 هل يوجد للدالة المفروضة نهاية كبرى او نهاية صغرى لائنا اذا فرضنا انه يراد

تعيين المكرر التفاضلي لمعادلة  $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}} = \text{واحد} \times \text{واحد}$  التي فيها

$\text{واحد}$  و  $\text{واحد}$  دوالا لمتغير  $\text{واحد}$  واحداهما دوى  $\text{واحد}$  تؤول الى صفر  
 ببعض المقادير التي ياخذها متغير  $\text{واحد}$  وأخذنا تفاضل هذه المعادلة كافي

(بند ١٤) وصمنا على  $\frac{و}{ص}$  يوجد

$$\frac{\frac{و}{ص}}{\frac{و}{ص}} + \frac{\frac{و}{ص}}{\frac{و}{ص}} = \frac{\frac{و}{ص}}{\frac{و}{ص}}$$

وحيث ان  $\frac{و}{ص}$  نؤول الى صفر بالمقدار الذي تأخذه كمية  $\frac{و}{ص}$  فتؤول

تلك المعادلة الى  $\frac{\frac{و}{ص}}{\frac{و}{ص}} = \frac{\frac{و}{ص}}{\frac{و}{ص}}$  ويفهم من ذلك انه لايجاز

$\frac{\frac{و}{ص}}{\frac{و}{ص}}$  يلزم ضرب المصكرات التفاضلية للمضروب الذي يصير صفرا

في المضروب الآخر [وهذه القاعدة ليست خالية عن العوارض فان  $\frac{\frac{و}{ص}}{\frac{و}{ص}}$

قد يكون صفرا ايضا ومثاله معادلة  $\frac{\frac{و}{ص}}{\frac{و}{ص}} = \frac{و}{ص} (ص - و)$  التي

تحتوى على جذور متساوية فان حدى مقدار  $\frac{\frac{و}{ص}}{\frac{و}{ص}}$  فيها يصير ان صفرا

ويجب البحث عن المصكرات التفاضلية التي بدرجة عليا حينئذ عوضا عن

اسقاط المضروب المتبين برمز  $\frac{\frac{و}{ص}}{\frac{و}{ص}}$  كما في (بند ٩٦) ليعرف

هل يوجد للدالة المفروضة نهاية كبرى او نهاية صغرى واذا صار  $\frac{\frac{و}{ص}}{\frac{و}{ص}}$

غير محدد وقد آل الامر الى حالة (بند ٨٧) ]

• ١٠٨ • واذا اردنا من معرفة المكرر التفاضلي بدرجة ثانية الى

$\frac{\frac{و}{ص}}{\frac{و}{ص}} = \frac{\frac{و}{ص}}{\frac{و}{ص}}$  بفرض  $\frac{و}{ص} = و$  نضع المعادلة اولا هكذا

$\frac{\frac{و}{ص}}{\frac{و}{ص}} = \frac{1}{\frac{و}{ص}} \times (و - و)$  ويوجد من بعد البند المتقدم

$$\frac{١٠}{\sqrt{٣}} = \frac{(٣ - ٣\sqrt{٣})}{\sqrt{٣}} \times \frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$$

• ١٠٩ • نعود الآن الى معادلة (٥٠) التي يراد استخراج

$$\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} \text{ منها في حالة فرضية } \sqrt{٣} = \frac{٣}{٣} \text{ فنحل البسط فيها الى}$$

مضروبيه فيوجد

$$\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}(\sqrt{٣} - ٣)}{\sqrt{٣}(\sqrt{٣} - ٣)} \text{ او}$$

$$\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}(\sqrt{٣} - ٣)} \times (\sqrt{٣} - ٣)$$

ثم نقول حيث ان مضروب (٣ -  $\sqrt{٣}$ ) يساوى صفرا في هذه الحالة  
يوجد من بعد (بند ١٠٧)

$$\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}(\sqrt{٣} - ٣)} \times (\sqrt{٣} - ٣)$$

$$= \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}(\sqrt{٣} - ٣)}$$

واذا قسم بسط ومقام هذا الكسر الاخير على  $\sqrt{٣}$  يحدث

$$\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}(\sqrt{٣} - ٣)} \text{ ثم يحدث بوضع مقدار } \sqrt{٣}$$

الذي هو  $\frac{٣}{٣}$  عوضا عنه

$$\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}(\sqrt{٣} - ٣)} = \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}(\sqrt{٣} - ٣)}$$

وحيث ان هذا المقدار سالب فيوافق مقدار  $\sqrt{٣}$  الى نهاية كبرى

• (المسئلة السادسة) •



$$\frac{واصة}{س^2} \times \frac{س^2}{س^2 + د^2} \sqrt{\quad} + \frac{س(س + د)}{س^2 + د^2} \sqrt{\quad} =$$

ثم نشارك المقامات بان نضرب كيتي الكسر الاول في س وكيتي الكسر الثاني في  $\sqrt{س^2 + د^2}$  فيحدث لنا

$$واصة = \frac{س(س + د)}{س^2 + د^2} \sqrt{\quad} + \frac{س^2}{س^2 + د^2} \sqrt{\quad} \times س - د$$

ثم نجعل البسوط ونختصر حدودها ونقسم على س فيوجد اخيرا

$$\frac{واصة}{س} = \frac{س^2 - د^2}{س^2 + د^2} \sqrt{\quad}$$

وبساواة البسط بصفر يستخرج منه

$$س = \sqrt{\frac{د^2}{س^2 + د^2}}$$

ولاجل ان ثبت ان هذا المقدار يوافق الى نهاية صغرى يكفي ان نضع بموجب (بند ١٠٧) محل البسط الذي هو المضروب العدم مكرره التفاضلي فنجد

على هذه الصورة

$$\frac{واصة}{س} = \frac{س^3}{س^2 + د^2} \sqrt{\quad} = \frac{س^3}{س^2 + د^2} \sqrt{\quad}$$

بالطبع ولم يجر وضع مقدار س لان المربع س موجب أبدا

• (المسئلة السابعة) •

• ١١١ • المراد معرفة اكبر المثلثات القائمة الزاوية الممكن رسمها على مستقيم مفروض معتبرا وترها

ولذلك نفرض ان هذا المستقيم يكون ا- (شكل ١٨) ثم نرمز له بحرف د

ونرمز لاحد الضلعين بحرف س فالضلع الاخر يصير  $\sqrt{س^2 - د^2}$

ومقدار مساحة المثلث تكون حينئذ  $\frac{د}{2} \sqrt{س^2 - د^2}$  فاذا رمزنا لهذه

المساحة بجرف صه وراجعنا (بند ١٠٣). وجدنا ان المعادلة المنتهى اليها لو أخذتفاضلها تكون هي

$$\text{صه} = ٠ \text{ صه } \sqrt{\text{ح}^2 - \text{ر}^2} \text{ أو وهو الاول}$$

$$\text{صه} = \sqrt{\text{ح}^2 - \text{ر}^2} \text{ ومنها يستخرج}$$

$$\frac{\text{واصه}}{\text{واسه}} = \frac{\text{ح}^2 - \text{ر}^2}{\sqrt{\text{ح}^2 - \text{ر}^2}}$$

وحين نساوي هذا المقدار بصفر نجد

$$\text{ح}^2 - \text{ر}^2 = ٠ \text{ أو}$$

$$\text{صه} = (\text{ح}^2 - \text{ر}^2) = ٠ \text{ ومنها يحدث}$$

$$\text{صه} = ٠ \text{ أو } \text{ر}^2 = \text{ح}^2$$

وحيث انه لا يمكن ان يكون مقدار صه صفر فيستخرج ذلك المقدار من

المعادلة الثانية يعنى الاخيرة فيوجد صه =  $\sqrt{\text{ح}^2 - \text{ر}^2}$  وبهذا المقدار

يستدل على ان ضلعي اء و س يكونان متساويين

هذا وبأخذ تفاضل مضروب ح - ر<sup>٢</sup> يوجد كافي (بند ١٠٧) أن

$$\frac{\text{واصه}}{\text{واسه}} = \frac{\text{صه}}{\sqrt{\text{ح}^2 - \text{ر}^2}} \times \frac{(\text{ح}^2 - \text{ر}^2)}{\text{واسه}} = \frac{\text{ح}^2 - \text{ر}^2}{\sqrt{\text{ح}^2 - \text{ر}^2}}$$

وبسبب سلب هذا المقدار يتحقق ان فرضية ح - ر<sup>٢</sup> = ٠

تحدث لمجهول صه مقداراً يوافق الى نهاية كبرى

• (في المدلول الهندسى للمكترات التفاضلية) •

• ١١٢ • قد علمنا من (بند ٧١) ان  $\frac{\text{واصه}}{\text{واسه}}$  يبين ظل الزاوية

التي تقع بين الخط المماس في نقطة (صه و صه) وبين الخط الافقي وحيث كانت هذه القضية اساساً لما يراد البحث عنه فلننبئها من اول وهلة بالوجه الآتى وهو أن نرمز الى ح م (شكل ٤) بجرف صه والى ح م

بجرف

\*(٨٩)\*

بحرف ه ثم نرم م موازيا الى محور الاقيبات فيحدث لنا  
 $\vec{m} \cdot \vec{c} = d (m + h) + w$

$$m \cdot c = d(m + h) - d m = -d m + d h + w$$

واذا وضعنا في معادلة ظاع  $\frac{m}{c} = \frac{m}{c}$  الحادثة من التناسب

$$m : c :: 1 : \text{ظاع}$$

عوضا عن  $m$  و  $c$  ما ساواهما نجد

$$\frac{m}{c} = \frac{1}{\text{ظاع}} + \frac{h}{c} + \frac{w}{c}$$

$$= \frac{1}{\text{ظاع}} + \frac{h}{c} + \frac{w}{c}$$

وحين نرمق الى النهاية نصير ه صفرا وبؤول ظاع الى ظا ط و يوجد ان

$$\frac{1}{\text{ظا ط}} = \frac{1}{\text{ظاع}}$$

هذا واذا صار م (شكل ١٩) نهاية كبرى صار م ط موازيا الى محور الاقيبات فيجعل بينه وبين هذا المحور زاوية قدرها صفرا وبهذا

$$\frac{1}{\text{ظا ط}} = \frac{1}{\text{ظاع}}$$

وبمثل ذلك ثبت انه متى كان م ح نهاية صغرى كان الظل صفرا ايضا يعنى انه

$$\frac{1}{\text{ظا ط}} = \frac{1}{\text{ظاع}}$$

وبعلم من ذلك ان معادلة  $\frac{1}{\text{ظا ط}} = \frac{1}{\text{ظاع}}$  لا تبين الا شرط توازي المماس

في نقطة م التي ابعادها م و ح الى محور الاقيبات

١١٣ • نبحث الآن عن الحالات التي يكون فيها  $\frac{1}{\text{ظا ط}} = \frac{1}{\text{ظاع}}$  موجبا او سالبا



مقدار  $\mu$  ع ويوجد حيث

$$\mu = \frac{v^2}{r^2} - \frac{v^2}{r^2} + \dots \text{الخ (٥٢)}$$

وبتقارن مقدار  $\mu$  المستدل عليهما بمعادلتى (٥١) و (٥٢)

يشاهد أن  $\frac{v^2}{r^2}$  فى أحدهما متبوع بإشارة + وفى الآخر بإشارة -

هذا وبناء على إمكان جعل إشارة الحد الأول لحل  $\mu$  ع كإشارة ناتج هذا الحل تمامه وكون المربع  $\frac{v^2}{r^2}$  الذى هو موجب بالطبع لا يؤثر فى إشارة

$\frac{v^2}{r^2}$   $\frac{v^2}{r^2}$  ه' يكون المكرر التفاضلى  $\frac{v^2}{r^2}$  حازرًا وحده إشارة حاصل جمع

جميع حدود مقدار  $\mu$  ع وحيث نعلم أنه إذا لم تعتبر معادلتنا (٥١)

و (٥٢) إلا بالنسبة للإشارات المتبعة بها الطرفان بما يمكن إسقاط  $\frac{v^2}{r^2}$

مع الحدود التى تلى  $\frac{v^2}{r^2}$  ونصير هاتان المعادلتان هكذا

$$\mu = \frac{v^2}{r^2} + \frac{v^2}{r^2} - \frac{v^2}{r^2} = \frac{v^2}{r^2}$$

ومنهما يحدث

$$\left. \begin{aligned} \mu + \frac{v^2}{r^2} &= \frac{v^2}{r^2} \\ \mu - \frac{v^2}{r^2} &= \frac{v^2}{r^2} \end{aligned} \right\} \text{(٥٣)}$$

وإذا اعتبرت  $\mu$  كمية موجبة وقع  $\mu$  ع (شكل ٢٠) فى جهة

واحدة معها فيكون موجبا وتبين المعادلة الأولى من معادلتى (٥٣) حيث

أنه متى كان  $\mu$  حديب الخفى متجهها نحو محور الإقيبات (شكل ٢٠) كان

$\frac{v^2}{r^2}$  موجبا

وإذا اعتبرنا بعد ذلك ثانية معادلتى (٥٣) مع (شكل ٢١) المتسبب لهما

شاهدنا ان — م ع بين خطا مستقيما تعاكس في الاشارة مع ص

ويعلم من ذلك ان  $\frac{V}{V_s}$  يكون سالبا في حالة (شكل ٢١) يعني متى يكون

تغير المتغي متجهيا نحو محور الاقيبات

• ١١٤ • قد فرضنا فيما مر أن المتغي ممتد فوق محور الاقيبات والا

نبحث عنما يقع حين يمتد هذا المتغي تحت المحور المذ كور كما في (شكل ٦٧)

فتقول من المتيقن من بعد ما سبق انه حيث كان المتغي محدبا نحو محور

الاقبيات في نقطة م فكيفية  $\frac{V}{V_s}$  أو م تكون موجبة لكن مستقيما

م و م ع الوجودان في جهة واحدة من مماس ط ط يجب أن يكونا متحدى الاشارة ومن ثمة يكون م ع موجبا كما أن م ع

موجب وينتج من ذلك ان  $\frac{V}{V_s}$  في نقطة م المتغير فيها المتغي نحو محور

الاقبيات يكون مختلفا في الاشارة مع الرأسى م ع التبوع باشارة السلب وبالعكس فانه يكون المتغي محدبا نحو محور الاقيبات متى كان ص

و  $\frac{V}{V_s}$  متحدى الاشارة واذن يمكن أن يقال في العموم أن  $\frac{V}{V_s}$

يكون متحدا في الاشارة مع ص متى كان المتغي موجبا تحديه نحو محور الاقيبات بوقوعه في اى جهة كانت وبأخذ اشارة عكس اشارة ص

متى كان المتغي موجبا تعبيره نحو المحور المذ كور

ويعلم ان المتغي يكون محدبا او مقعرا نحو محور الاقيبات بحسب كون الرأسى

أيلا الى نهايته الصغرى او نهايته الكبرى ويتضح السبب في ان  $\frac{V}{V_s}$

موجب في الحالة الاولى وسالب في الثانية

• ١١٥ • ويقال ايضا انه يمكن أن توجد نهاية كبرى او نهاية صغرى

بمى يكون  $\frac{V}{V_s} = \infty$  ولشرح مدلول هذا الشرط ففرض أن

صه = دسه معادلة منحنى م د (شكل ٢٢) ثم نقول من المعلوم انه اذا اخذ متغير سه مقدار ا ح انتجت هذه المعادلة الرأسى م ح واذا حلت هذه المعادلة بعد ذلك بالنسبة الى صه واستخرج منها سه = دسه ثم جعل صه = ا ح (وهو المقدار السابق لمتغير صه) انتجت المعادلة المذكورة سه = ح م وفي هذه الحالة تعتبر صه كاتفي ومه كراسى ويرسم المنحنى نفسه بأخذ الاسباب على محور اسمه والاقبيات على محور اسمه

وبهذه المنابة يمكن البحث عن النهاية الكبرى او الصغرى للدالة سه (التي هي

دالة الى صه) ولذلك يستخرج من المعادلة المفروضة  $\frac{واصه}{قاصه} = م$

ثم يفرض  $م = ٠$  ومن ثمة ينتج  $\frac{واصه}{قاصه} = \frac{١}{م}$  من معادلة

$\frac{واصه}{قاصه} = م$  ويشاهد أنه متى يكون  $م = ٠$  يوجد  $\frac{واصه}{قاصه} = \infty$

ويعلم من ذلك ان الشرط اللازم لوقوع نهاية كبرى او صغرى في جهة الاقبيات

هو أن يكون  $\frac{واصه}{قاصه} = \infty$

• ١١٦ • ولتمثل بمعادلة

$$صه = دسه - د$$

قنستخرج منها  $\frac{واصه}{قاصه} = \frac{د}{قاصه}$  وبمساواة هذا المقدار بصفر

يكون صه =  $\infty$  ويتبين من ذلك انه لا يوجد للمنحنى نهاية كبرى نحو الاسباب الاعلى بعد غير محدود من محور اسمه

ولاجل أن يعرف هل توجد له نهايات نحو الاقبيات اولا (والنهايات تشمل الكبرى والصغرى) يفرض مقدار

قاصّة  $\frac{\text{قاصّة}}{\text{واسر}}$  غير مثته فيوجد  $\frac{\text{قاصّة}}{\text{واسر}} = \infty$  وهو شرط يتحقق متى يجعل  $\text{واسر} = 0$ .

وبهذا يتوّل مقدار  $\frac{\text{قاصّة}}{\text{واسر}}$  الى  $\frac{7}{7}$  وهو ناتج موجب ويعلم من ذلك ان مقدار  $\text{واسر} = 0$  يصلح الى نهاية صغرى لكمية  $\text{واسر}$  وتعين هذه النهاية يجعل  $\text{واسر} = 0$  في المعادلة المفروضة فتوّل الى  $\text{واسر} = 0$  ومنها يحدث  $\text{واسر} = \frac{7}{7}$  وهو مقدار النهاية الصغرى المطلوبة وهي مينة بخط ام في (شكل ٢٣)

\* ١١٧ \* وليتأمل ان معادلة  $\frac{\text{قاصّة}}{\text{واسر}} = \infty$  تدل على ان مماس

مط (شكل ٢٣) ظل زاوية قائمة ومن ثم يكون عوديا على محور الاقيبات \* (كلام كل على اللقط القريبة او الغريبة للمنحنيات) \*

\* ١١٨ \* في حساب التفاضل فائدة عظيمة لمعرفة صورة او شكل المنحنى المعلوم المعادلة وقد انتهت لنا قضايا النهايات الكبرى والصغرى طرق تعيين حدود المنحنى في جهة الاقيبات والراسيات ولكن هذا غير كاف في تعيين صورة المنحنى او شكله فانك تشاهد مثلا عدم تشابه منحنيات اشكال (٦٨) و (٦٩) و (٧٠) التي لها نهايات متحدة وهي و ع و د في جهة الراسيات و ا و و ر في جهة الاقيبات فان منحنى (شكل ٦٨) يتميز عن منحنى (شكل ٦٩) بكون انه لا يوجد في الاخير الا نقطة تحديب واحدة ونقطة التحديب هي التي يتحوّل المنحنى فيها من التحديب الى التقعير او عكسه واما المنحنى الاول وهو الموافق الى (شكل ٦٨) فانه يحتوي على نقطتين من خط التحديب احدهما في ه والاخرى في د ويحتوى على نقطة قلبية او عكسية في ح والمراد بهذه النقطة كل نقطة يعطل المنحنى فيها عن طريق سيره دفعة واحدة

\* ١١٩ \* وعلى العموم كل نقطة وقع للمنحنى فيها تغير في سيره تسمى

نقطة

نقطة فريدة او غريبة واذا علمنا مواضع هذه النقط ~~لممكن~~ مع السهولة تتبع المنحنى في سيره

مثاله اذا فرض انه يوجد المنحنى (شكل ٧٠) نقطتا تحديب احدهما في هـ والاخرى في شـ ونقطتان عكسيتان في ف و جـ امكن تشكيل المنحنى بالكيفية الآتية وهى أن نقول بالابتداء من نقطة ا التى هى التحديد في جهة الاقيان يتقرر المنحنى أولا نحو محور الاقيان الى نقطة هـ التى توجد فيها نقطة تحديب أعنى يتحول المنحنى فيها من التعبير الى التحديب ومن هذه النقطة الى ف يكون قوس هـ ف من المنحنى محدبا نحو المحور المذكور وفي نقطة ف التى هى نقطة عكسية يعطل المنحنى عن طريق سيره ومن بعدها يكون محدبا ايضا في جزء ف شـ ليصير مقعرا في الجهة الثانية لنقطة التحديب شـ ويمتد هكذا الى نقطة جـ التى هى التحديد نحو الراسيات ويتركب المنحنى اخيرا من قوسى جـ حـ و ا دـ من ابتدا حـ الى دـ ومن ابتدا ا الى جـ وهذان القوسان يتقرران نحو محور الاقيان ويتلاقيان في نقطة عكسية ويمرّان بنقطتي سـ و دـ الدالة احدهما على التحديد جهة الاقيان والاخرى على التحديد جهة الراسيات \* ١٢٠ \* ومن بعد ما نقرر تعلم مزية تعيين ابعاد النقط الغريبة بواسطة معادلة المنحنى وحيث بينا آفا طرق ايجاد النهايات الكبرى والصغرى فلم يبق علينا الا ان نستغل بمبحث ما بقى من النقط وهى الغريبة فنقول

• (في نقط التحديب) •

\* ١٢١ \* قد علمنا مسبقا ان نقطة التحديب هى التى يتحول المنحنى فيها من التحديب الى التعبير أو من التعبير الى التحديب فنحنى م م م (شكل ٧١) يحتوى على نقطة من هذا الجنس في م فتمتد من هذه النقطة هـ اس ط ط ثم نعتبر كافة الراسيات المحصورة بين م حـ و م جـ فنشاهد أن الامتداد م دـ للرأسى يأخذ في النقص وينعدم في نقطة م. واذا اعتبرنا الراسيات البقية بعد وهى الكائنة عن يسار م جـ شاهدنا وقوع الامتداد م دـ

تحت المماس ومن ثم تتغير اشارته بمعنى انه اذا كان  $\dot{M}$  موجباً يكون  $\dot{M}$  سالباً وهذا هو الشرط الذي هاتحن نشرحه بالمعادلة فنقول  
ليكن في (شكل ٧١)  $\dot{C} = \dot{H} = \dot{C} = \dot{H}$  فن المعلوم انه يوجد

$$\dot{M} = \dot{C} - \dot{M} - \dot{C} \text{ أو}$$

$$\dot{M} = \dot{C} - (\dot{H} + \dot{H}) - \dot{C} \dots\dots\dots (٥٤)$$

ولنعين مقدار  $\dot{C}$  نضع

$$\dot{C} = \dot{C} + \dot{M} + \dot{C} \text{ أو}$$

$$\dot{C} = \dot{C} + \dot{H} + \dot{C} \dots\dots\dots (٥٥)$$

ولاستخراج مقدار  $\dot{C}$  نطرانه يحدث من مثلث  $\dot{C}$  والقائم الزاوية

$$\dot{C} = \dot{M} \text{ و } \dot{C} = \dot{M}$$

وحيث انه يعلم من بند (٧١) ان ظل زاوية  $\dot{C}$  هو الواقعة بين المماس

والخط المرسوم من نقطة التماس  $\dot{M}$  موازياً للخط الافقي يساوي  $\frac{\dot{C}}{\dot{H}}$

فاذا ابدلنا  $\dot{C}$  في المعادلة الاخيرة بهذا المقدار ووضعنا  $\dot{H}$  بدلا  
عن  $\dot{M}$  نجد ان

$$\dot{C} = \dot{H} \frac{\dot{C}}{\dot{H}}$$

وبوضع هذا المقدار في معادلة (٥٥) عوضا عن  $\dot{C}$  ووضع مقدار

$\dot{C}$  الحادث بعد ذلك في معادلة (٥٤) يوجد

$$\dot{M} = \dot{C} - (\dot{H} + \dot{H}) - \dot{C} \frac{\dot{C}}{\dot{H}} \dots\dots\dots (٥٦)$$

ويمكن استخراج مقدار  $\dot{M}$  من مقدار  $\dot{C}$  بدون احتياج الى

حساب لانه اذا قدرنا سيران الرامي بالتوازي لنفسه يشاهد ان  $\dot{M}$

يؤول الى  $\dot{M}$  متى تغير  $\dot{H}$  بكمية  $-\dot{H}$  ويعلم من ذلك انه اذا

غيرنا كمية  $+\dot{H}$  بكمية  $-\dot{H}$  في معادلة (٥٦) يوجد

$$(or) \dots \frac{a}{b} + c - (d - e) = f$$

وإذا بدلنا الآن كيتي د (سه + هـ) و د (سه - هـ) بالحلول المكافئة لهما  
يكون

$$m' = m + \frac{m}{\gamma} + \frac{m}{\gamma^2} + \dots = m \left( 1 + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2} + \dots \right)$$

$$h \frac{v^2}{r^2} + v - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{r \times 1} \frac{v^2}{r^2} + h \frac{v^2}{r^2} - v \right) = \frac{1}{2} m_1$$

### و باختصار هاتین المعادلتین یحدث

$$(٥٨) \dots\dots\dots + \frac{r_2}{r \times r \times 1} \frac{w_2}{w} + \frac{r_1}{r \times 1} \frac{w_1}{w} = \rho_1$$

$$(٥١) \dots \dots \dots + \frac{r}{r \times r \times 1} \frac{r}{r} - \frac{r}{r \times 1} \frac{r}{r} = 2$$

لكن لو وقع نقطة تعذيب في م يجب أن يكون احد خطي م<sup>ك</sup> و م<sup>د</sup>  
واقعا فوق مماس ط ط' والاخر تحته متى تأخذ ه مقدارا صغيرا  
جدا فيعلم من ذلك انه يلزم معا كة م<sup>ك</sup> و م<sup>د</sup> في الاشارة وهذا

لا يمكن الا اذا كان الحد الاول وهو  $\frac{2}{3}$  و  $\frac{2}{3}$  من متسلسلي (٥٨)

و (٥٩) صفرا لانه اذا لم يكن هذا الخدم مساويا الى صفرا ممكن اعطاء

کیا ہ مقدار اصغیر اکافی لان یجوز  $\frac{\text{واحدہ}^2}{\text{واحدہ}^2} \frac{\text{ہ}^2}{2 \times 1}$  فاتحہ حاصل

الجمع الجبرى للحدود التى تليه فى المتسلسلة وإشارة هذا الحد تكون فى هذه

الحالة كإشارة ناتج المتسلسلة وحيث كان هذا الحد متحد الإشارة  
في المتسلسلتين يكون  $\frac{v}{s} = 0$  و  $\frac{v}{s} = 0$  (شكل ٧١) متحدى الإشارة أيضا  
ومن أجل ذلك يعلم أنه ليكون  $\frac{v}{s} = 0$  وم  $\frac{v}{s} = 0$  مختلفي الإشارة يلزم أن يوجد

$$\frac{v}{s} = 0 \text{ أو هو الأول}$$

$$= \frac{v}{s}$$

\* ١٢٢ \* إذا جعل مقدار  $\frac{v}{s}$  الجاعل  $\frac{v}{s}$  صفرا مقداره

$\frac{v}{s}$  ايلا الى صفر أيضا يجب لوجود نقطة تحذيب أن يكون  $\frac{v}{s}$

مساويا الى صفر كذلك وإذا صار في هذه الحالة  $\frac{v}{s}$  صفرا يجب

أن يكون أيضا  $\frac{v}{s}$  مساويا الى صفرا توجد نقطة تحذيب وعلى هذا

فقس واذن يجب أن يكون المكرر التفاضلي الاخير الذي يكون صفرا برتبة  
منزوجة

\* ١٢٣ \* متى يجعل مقدار  $\frac{v}{s}$  المتحد في حلي (٥٨) و (٥٩)

$\frac{v}{s}$  غير محدود يكون هذان الحلان غير محدودين ايضا ولا ينتج شيء حينئذ

من الاثبات السابق المؤسس على امكانية هذين الحلين وينبغي أن يعلم في هذه

الحالة أن شرط  $\frac{v}{s} = 0$  يستدل به في العموم على وجوب

تغير إشارة  $\frac{v}{s}$  في نقطة التحذيب وهذا يوافق ما هو مشروح

في بند (١١٣) ويمكن تغير هذه الإشارة أيضا حين يصير هذا المكرر  
التفاضلي

\* (٩٩) \*

التفاضلي غير منته ولنمثل بمثال موضع لهذه المشكلة فنقول

$$\text{ليكن } \frac{v^2}{s^2} = \frac{v^2}{s^2}$$

فاذا ابدلت  $s$  بهذه المقادير

$$s = 7 - h \text{ يوجد } \frac{v^2}{s^2} = \frac{v^2}{h^2}$$

$$s = \infty \text{ يوجد } \frac{v^2}{s^2} = \frac{v^2}{\infty}$$

$$s = 7 + h \text{ يوجد } \frac{v^2}{s^2} = \frac{v^2}{h^2}$$

ثم يشاهد ان مقام مقدار  $\frac{v^2}{s^2}$  هو الذي تتغير اشارته في الاكثر التفاضلي

بعد نقطة التحديب

\* ١٢٤ \* وينتج مما سبق انه لا مكان وجود نقطة تحديب في منحن

يلزم ان يوجد لافق هذه النقطة

$$\frac{v^2}{s^2} = 0 \text{ او } \frac{v^2}{s^2} = \infty$$

ومتى يؤكّد وقوع احد هذين الشرطين تزداد وتقص على التوالي من افق

النقطة الواقعة لهذا الشرط كمية صغيرة جدًا ه فاذا صار مقدارا  $\frac{v^2}{s^2}$

الحادثان مختلفي الاشارة كان للمنحنى نقطة تحديب لانه متى يكون  $\frac{v^2}{s^2}$

موجباً يكون تحديب المنحنى متجهاً نحو محور الافاق ومتى يكون سلبياً يكون تغير المنحنى متجهاً نحو المحور المذکور .

\* (المثال الاول) \*

\* ١٢٥ \* لتطبيق القضايا السابقة على امثلة نطرحه ل يوجد للمنحنى

المستدل عليه بمعادلة

صمة =  $s + ٢ (س - ٢) \dots (٦٠)$   
 نقطة تحديد ولذلك نأخذ التفاضل فيوجد بعد التسمه على  $س$

$$\frac{ص}{س} = ٣ \times ٢ (س - ٢) \text{ ثم يوجد}$$

$$\frac{ص}{س} = ١٢ (س - ٢) \text{ و}$$

$$\frac{ص}{س} = ١٢$$

ولاجل أن يمكن وجود نقطة تحديد المعنى يجب أن يكون لتغير  $س$

مقدار يجعل  $\frac{ص}{س}$  ايل الى صفر وحيث كانت  $س$  كمية متغيرة

فتعين احد مقاديرها بشرط وجود  $١٢ (س - ٢) = ٠$  و يوجد  
 حينئذ  $س = ٢$  لاجل الاقنى الذى يمكن أن يصلح لنقطة تحديد  
 ولأن كيد وجود هذه النقطة فى المعنى يتقص من اقنى  $٢$  كمية صغيرة جداً  
 رمزها  $هـ$  ثم يوضع  $٢ - هـ$  محل  $س$  فتكون نقطة  $م$   
 (شكل ٧٢) التى اقها  $٢ - هـ$  موافقة الى

$$\frac{ص}{س} = ١٢ - هـ$$

ثم يوضع  $٢ + هـ$  محل  $س$  فتوافق نقطة  $م$  التى اقها  $٢ + هـ$   
 الى  $\frac{ص}{س} = ١٢ + هـ$  وبسبب اختلاف هذين الحليين فى

الاشارة يتحقق وجود نقطة التحديد فى المعنى المفروض فى  $م$  وحيث  
 كان فرض  $س = ٢$  يجعل  $\frac{ص}{س}$  ايل الى صفر ايضاً فيتحقق

توازى المماس فى نقطة التحديد بالمحور الاقنى

\*(المثال الثانى)\*

• ١٢٦ • ولينبه انه لا يتيسر دائما مساواة مقدار  $\frac{v}{v_0}$  الى صفر

فانه للبحث عن وجود نقط التعديب في المنحنى الذى معادلته  $v = v_0 + v_1$  ولا يجرى التفاضل ويستخرج منه

$$\frac{v}{v_0} = \frac{v_0}{v_0} = 1 \quad \text{و} \quad \frac{v}{v_0} = \frac{v_1}{v_0} = \frac{v_1}{v_0}$$

ولا شك انه لا يمكن مساواة مقدار  $\frac{v}{v_0}$  بصفر (لانه كمية ثابتة)

ومن ثمة يعلم ان المنحنى المستدل عليه بمعادلة  $v = v_0 + v_1$  حال عن نقط التعديب ولا رية في ذلك حيث ان هذا المنحنى قطع مكافى وانما

يستدل بسبب ايجاب مقدار  $\frac{v}{v_0}$  على ان هذا المنحنى محدب في جميع

نقطه نحو محور الاطلاق

• (المثال الثالث) •

• ١٢٧ • ولتمثل بهذه المعادلة  $v = v_0 + v_1$  فكلها بالنسبة

الى  $v_0$  ثم نأخذ تفاضلا فيوجد

$$\frac{v}{v_0} = \frac{v_0}{v_0} = 1$$

$$\frac{v}{v_0} = \frac{v_1}{v_0} = \frac{v_1}{v_0}$$

$$\frac{1}{v_0} = \frac{1}{v_0} = \frac{1}{v_0}$$

$$\text{ثم يوضع } \frac{1}{v_0} = \frac{1}{v_0} = \frac{1}{v_0}$$

$$\frac{1}{v_0} = \frac{1}{v_0} = \frac{1}{v_0}$$

ليبحث عن مقدار  $v_0$  الموافق الى نقطة التعديب فيرى ان هذه المعادلة

أعني الأخيرة لا تحقق الإوضاع  $\infty =$  وهذا لا يستدل على شيء  
لكنه حيث يتيسر لنا أيضا جعل مقدار  $\frac{1}{r^2}$  غير منته فتتحقق معادلة

$$\infty = \frac{1}{r^2}$$

بوضع  $\infty =$  وهذا المقدار يستدل على أنه يمكن أن يكون للمنفى  
المفروض قطعة تحديب في النقطة الأصلية ولتأكيده وجود هذه النقطة تبدل  
 $\infty$  بكميتي  $0 + \infty$  و  $0 - \infty$  أعني  $+$  و  $-$   
على التعاقب وتظهر هل يكون  $\frac{1}{r^2}$  في حالتين الحالتين متبوعا بإشارتين  
مختلفتين والاولى أن تفعل هاتان العليتان معا بإبدال  $\infty$  بمقدار  
 $\pm$  فيقول المكرر التفاضلي الذي بدرجة ثانية إلى

$$\frac{1}{r^2} \times \pm = \frac{1}{r^2}$$

والمقدار العلوي وهو المتبوع بإشارة  $+$  يتسبب إلى أفق أكبر من أفق  
نقطة التحديب والسفلي وهو المتبوع بإشارة  $-$  يتسبب إلى أفق أصغر من  
أفق هذه النقطة وبسبب تخالف هذين المقدارين في الإشارة يتحقق  
وجود نقطة التحديب في المنحنى المستدل عليه بمعادلة  $\infty =$  في النقطة  
الأصلية انظر (شكل ٧٣)

• (المثال الرابع وهو الأخير) •

• ١٢٨ • لتكن هذه المعادلة

$$(\infty - s) = r^2 \text{ فيوجد منها}$$

$$\infty = s + \frac{r^2}{s}$$

$$\frac{1}{r^2} \times \pm = \frac{1}{r^2}$$

• (١٠٣) •

$$\frac{1}{\frac{1}{\text{م}} \times \frac{1}{\text{ر}} \pm} = \frac{\text{م}}{\text{م} \pm \text{ر}}$$

وحيث انه يجعل م = ٠ يوجد  $\frac{\text{م}}{\text{م} \pm \text{ر}} = \infty$  فيستدل

بذلك على انه يمكن أن توجد نقطة تحديب في النقطة الأصلية وتحقق وجودها  
او عدمه فنجعل أولا م = + ه ونضع هذا المقدار في مقدار

$\frac{\text{م}}{\text{م} \pm \text{ر}}$  فيكون

$$\frac{1}{\frac{1}{\text{ه}} \times \frac{1}{\text{ر}} \pm} = \frac{\text{م}}{\text{م} \pm \text{ر}}$$

ثم نجعل م = - ه فيصير مقدار  $\frac{\text{م}}{\text{م} \pm \text{ر}}$  تخيليا وكذا يكون

مقدار م وذلك يدل على ان المنحنى لا يمتد جهة الافاق السالبة واذن لا توجد

نقطة تحديب ولو أن  $\frac{\text{م}}{\text{م} \pm \text{ر}}$  في النقطة الأصلية غير محدود وستعرف

بالأثر أن النقطة الأصلية أ (شكل ٧٤) هي من طائفة النقط المسماة بالعكسية  
وانشرحها فنقول

• (في النقط العكسية) •

• ١٢٩ • اذا امتنع المنحنى عن طريق سيره دفعة واحدة وانقلب على

عقبه وكانت له نقطة عكسية فاذنا تحديب احدى طرفيه نحو محور الافاق

وكانت الطيبة الاخرى مقعرة فنحوه كما يرى في (الشكل ٧٤) يقال للانقلاب

او الانعكاس من الجنس الاول ويكون هذا الانعكاس من الجنس الثاني متى

كان تغير هاتين الطيبتين في جهة واحدة كما في (شكل ٧٥)

• ١٣٠ • ويمتنع المنحنى عن طريق سيره هكذا لان المقادير التي

ياخذها اق م في الجهة الاخرى لنقطة ٧ العكسية يحدث منها

مقادير تخيلية للرأسي م ويلزم ذلك أن يكون  $\frac{\text{م}}{\text{م} \pm \text{ر}}$  محتويا على كمية

جذرية بالنسبة الى متغير  $s$  واذا احدث  $\frac{v}{s^2}$  قبل أن يمتنع

المنحنى عن طريق سيره مقدارين احدهما له اشارة  $v$  والاخر عكسه استدل بذلك على وجود طينين للمنحنى مجتمعين في نقطة  $\gamma$  (شكل ٧٤) محدبة احدهما نحو محور الآفاق والاخرى مقعرة وبهذه العلامات يمكن الاستدلال على نقطة عكسية من الجنس الاول للمنحنى واذا كان العكس

بان كان مقدارا  $\frac{v}{s^2}$  متحدى الاشارة فالطينان المجتمعان في نقطة  $\gamma$

(شكل ٧٥) لا يمكن أن يكونا الا متحدين في جهة التقعر او التحديب وبعلم من ذلك ان الانعكاس في هذه الحالة يكون من الجنس الثاني

• (المثال الاول) •

• ١٣١ • تتظاهر هل يوجد للمنحنى الذى معادلته

$$(v - s) = s^2$$

نقط عكسية ولذلك نستخرج من هذه المعادلة

$$v = s \pm s^2 \quad s = 0 \dots \dots \dots (٦١)$$

فنشاهد أنه كلما اخذ متغير  $s$  مقدارا سلبيا احدث لمتغير  $v$  مقدارا

تخيليا واذن يمتنع المنحنى عن طريق سيره في النقطة الاصلية التي ابعادها

$$s = 0 \quad v = 0$$

عكسية في النقطة الاصلية لانه يحتمل أن لا يوجد في هذه النقطة الاقوسا

من منحن يمتد تقعيه على الدوام في جهة واحدة كما يكون في رأس القطع الزايد

ولذا ينبغي لمعرفة كون  $s = 0$  يصلح انقطة عكسية أن يعرف

ما يؤول اليه المكرر التفاضلى الذى بدرجة ثانية قرب النقطة الاصلية فيؤخذ

$$\text{تفاضل معادلة } v = s \pm s^2 \text{ ثم ينقسم الناتج على } v \text{ فيوجد}$$

• (١٠٥) •

$$(٦٢) \quad \frac{v}{r} \times \frac{9}{r} \pm 1 = \frac{v^2}{r^2}$$

$$\frac{v^2}{r^2} = \frac{v^2}{r^2} \times \frac{9}{9} \pm 1 = \frac{v^2}{r^2} \times \frac{9}{9} \pm 1 = \frac{v^2}{r^2}$$

والدلالة على تغير المصنف فهو محور الافاق او تحديه قريبا من النقطة التي يمنع  
عن طريق سيره فيها زاد افق هذه النقطة كمية صغيرة هـ بأن يجعل

هـ = ٠ هـ أعنى هـ = هـ ويوضع هذا المقدار في مقدار  $\frac{v^2}{r^2}$  فيحدث

$$\frac{v^2}{r^2} = \frac{v^2}{r^2} \times \frac{9}{9} \pm 1 = \frac{v^2}{r^2}$$

وحيث ان هذين المقدارين مختلفا الاشارة يستدل بهما على طيتين احدهما  
ام (شكل ٧٦) تتحدب فهو محور الافاق والاخرى ان تتقعرنحوه ويعلم  
من ذلك ان النقطة الاصلية نقطة عكسية من النوع الاول

• (المثال الثاني) •

• ١٣٢ • لتكن هذه المعادلة

$$(ص - د) = (د - ح) \quad \text{فيستخرج منها}$$

$$ص = د \pm (د - ح) \quad \dots \dots \dots (٦٣)$$

واذا جعلنا هـ = د يوجد ص = د لكن اذا اخذ متغير هـ  
مقادير اصغر من د حدث الى متغير ص مقادير تخيلية لانه بوضع د - هـ  
محل هـ يوجد ص = د  $\pm (د - هـ) = د \pm (د - هـ) = د$   
وهو مقدار تخيلي ويعلم من ذلك ان المصنف يمنع عن طريق سيره في نقطة د  
(شكل ٧٤) التي ابعادها د د ولعرفة كيفية امتداد طيات هذا  
المصنف بعد نقطة د يبدل هـ بمقدار د + هـ في مقدار

$\frac{v^2}{r^2}$  فيحدث لنا

• (١٠٦) •

$$\frac{v^2}{v_s^2} + \frac{v^2}{v_e^2} = \frac{v^2}{v_s^2}$$

ويستدل بالإشارة العليا على طية حـ المحدبة نحو محور الاتّفاق  
وبالإشارة السفلى على طية حـ المقعرة نحو المحور المذكور واذن توجد  
قطة عكسية من الجنس الأول في حـ

• (المثال الثالث) •

• ١٣٣ • ولناخذ النحى المستدل عليه بمعادلة

$$v = v_s + v_e \text{ مثلا فنقول}$$

حيث أنه يجعل  $v = 0$  يوجد  $v = 0$  ويجعل  $v = 0$  سالباً يكون  $v$  تخيلياً يدرك أن النحى يمنع عن طريق سيره في النقطة  
الاصليّة فنبحث عنما يؤول إليه  $\frac{v^2}{v_s^2}$  ولذلك نضع المعادلة السابقة

بهذه الصورة

$$v = v_s + v_e \text{ فنستخرج منها}$$

$$\frac{v^2}{v_s^2} = \frac{v_s^2}{v_s^2} + \frac{v_e^2}{v_s^2} + \frac{2v_s v_e}{v_s^2}$$

$$\frac{v^2}{v_s^2} = 1 + \frac{v_e^2}{v_s^2} + \frac{2v_s v_e}{v_s^2}$$

ثم نعطي إلى متغير  $v$  مقداراً موجباً صغيراً جداً وليكن  $h$  فجاء

$$\frac{v^2}{v_s^2} = 1 + \frac{v_e^2}{v_s^2} + \frac{2v_s v_e}{v_s^2} \text{ يكون أصغر من جزء } h \text{ ويعلم}$$

من ذلك أن مقدارى  $\frac{v^2}{v_s^2}$  المستدل عليهما بمعادلة

$$\frac{v^2}{v_s^2} = 1 + \frac{v_e^2}{v_s^2} + \frac{2v_s v_e}{v_s^2}$$

يكونان

ينكسران موجبان وينتج من ذلك انه يوجد في النقطة الاصلية طيتان  
مقعرتان معا نحو محور الآفاق واذن تكون هذه النقطة نقطة عكسية  
من الجنس الثاني

• ١٣٤ • النقطة العكسية ليست الا طبقة من النقط المسماة  
قطعا مكررة وهي الآتى شرحها

• (في النقط المكررة) •

• ١٣٥ • النقطة التي تجتمع فيها جلة طيات من منحني تسخي نقطة  
مكررة فان كانت الطيات اثنتين سميت هذه النقطة نقطة مضعفة وان كانت  
ثلاثة سميت نقطة مثلثة وهلم جرا نظرا لعدة الطيات المجمعة فيها

• ١٣٦ • لتكن ا (شكل ٧٧) نقطة مضعفة حادثة من طين  
ا ح و ا - المماس بهما ا ط و ا ط فاذا رمزنا للمعادلة بمنحنى  
هاتين الطيتين بهذا الرمز ك (س و ص) = ٠ وكانت هذه المعادلة  
عارية عن الكميات الجذرية كان تفاضلها وهو الكائن بهذه الصورة  
ع و ص + ك و ص = ٠ غير محتوي على جذر اصلا لانه لم يدخل في  
هذه الدالة تفاضل كمية جذرية وينتج من ذلك ان كيات ح و ك تكون  
كميات غير جذرية هذا و يوجد من المعادلة السابقة

$$\frac{و ص}{و س} = - \frac{ع}{ك} \dots\dots (٦٤)$$

ويجب أن يكون للمكرر  $\frac{و ص}{و س}$  التفاضلي مقداران مختلفان حيث انه

يوجد خطان مماسان ويلزم أن يتعين  $\frac{ع}{ك}$  بواسطة هذا الشرط وذلك  
يكون متى اشتمل  $\frac{ع}{ك}$  على جذر لكن ذلك غير ممكن لان  $\frac{ع}{ك}$  غير جذري  
ففي هذه الحالة يلزم أن يكون  $\frac{ع}{ك}$  آيلا الى هذه الصورة ÷ لان هذه  
الصورة غير متعينة فتتحقق بجملة مقادير كما يعلم من الجبر  
• ١٣٧ • وهما هي كيفية اثبات هذه القضية

• (١٠٨) •

نفرض ان  $\alpha$  و  $\beta$  يمينان مقداري ظلي الزاويتين الواقعتين بين مماسي  
طبق المنحنى وبين المحور الافقي فنلزام ان تحقق هذه المقادير معادلة

$$10 = \frac{\text{واحد}}{\text{واحد}} = \alpha + \beta$$

بوضع اى منها محل  $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$  ويوجد حينئذ

$$\alpha = \beta = 10$$

$$\alpha = \beta = 10$$

وبطرح هاتين المعادلتين من بعضهما يوجد

$$0 = (\alpha - \beta)$$

ولما كان مضروب  $\alpha - \beta$  يتركب من كيتين غير متساويتين  
وهما  $\alpha$  و  $\beta$  فلا يكون صفرا ولتحقيق المعادلة الاخيرة يجب أن يكون  
 $\alpha = \beta$  وبهذا نؤول معادلة  $\alpha + \beta = 10$  الى

$$\alpha = \beta \text{ ونؤول معادلة } \alpha + \beta = 10 \text{ الى } \alpha = \beta = 5 \text{ أو هو الاول}$$

$$\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha} = 1$$

\* ١٣٨ \* اذا كان محل الطيتين المجمعتين فى نقطة واحدة بجهة  
طيات يكنى أن تعتبر اثنتان منها فقط ولاجل أن تقاطع جميع الطيات فى ملقى

$$\text{هاتين الطيتين يجب أن يكون } \frac{\alpha}{\beta} = 1$$

وليتأمل انه متى وجدت بجهة طيات من منحنى لها مماس مشترك كانت هذه  
الطريقة عاجزة عن التوصيل الى نواتج كالسابقة لكن يجب أن يكون فى هذه

المسألة ايضا المكرر  $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$  التفاضلى يمكن الايلولة الى هذه الصورة ÷

وحيث

وحيث كان اثبات هذه القضية يتأسس على اعتبار تماس المنحنيات فشرحه في بند (١٧٠) حين تكلم على المنحنيات الالتصاقية فتأمله

\* ١٣٩ \* من المعلوم ان اثبات بند (١٣٧) مؤسس على خلوف المعادلة الاولى من الجذور  $\leq$  كن اذا اخذ تفاضل تلك المعادلة من غير ان نحذف هذه الجذور يمكن أن لا تحدث المعادلة التي يستدل بها على نقط

مكررة  $\frac{واصة}{واس} = ٠$  كما يظهر لك من معادلة بند (١٣١) فان لها

نقطة مضعة في النقطة الاصلية ولم تؤل معادلة (٦٢) الى ÷

بفرض  $سه = ٠$  ولكن تؤول الى  $\frac{واصة}{واس} = ١$

\* ١٤٠ \* وبالمجمل فلنضم الى ما ذكر أن معادلة  $\frac{واصة}{واس} = ÷$

وان حققت بوجود النقطة المكررة فليست مستلزمة لها لان الاثبات السابق لا يدل على انه يلزم من وجود هذه المعادلة وجود النقطة وانما ايلولة

$\frac{واصة}{واس}$  الى ÷ تبين فقط احتمال وجود نقطة مكررة في المنحنى المفروض

\* ١٤١ \* وما ذكر يمكن لبيان طريقة معرفة هل يمكن أن توجد

للمنحنى المستدل عليه بمعادلة مفروضة نقط مكررة اولا ولذلك يفرض ان هذه المعادلة تكون  $ع = ٠$  ثم يؤخذ تفاضلها فيوجد

$$ح واس + ك واس = ١٠$$

ويتظهر هل تحقق مقادير  $سه واس$  معامع ادلتى  $ح = ٠$  و  $ك = ١٠$

مع المعادلة المفروضة اولا فان كان ذلك كان هذا دليلا على احتمال وجود

نقطة مكررة في المنحنى يستدل على بعدديها بمقدارى  $سه واس$

ولرفع الشك يبحث عن كيفية المنحنى حول هذه النقطة فهذا البحث يتحقق

كون هذه النقطة مكررة

• (في النقط المزدوجة) •

• ١٤٢ • النقطه التي تطابق لبعدين حقيقيين في الجزء الذي تكون فيه ابعاد المنحنى المقروض كلها تخيلية ماعدا هذين البعدين الاثنين تكون الاحماله منفصله بالكلية عن المنحنى ومن اجل ذلك يقال لها نقطه منفصله او مزدوجه نظرا لازدواج بعديها الحقيقيين المحصورين بين ابعاد تخيلية

ولنرمز الآن بالرمز  $v = d$  لمعادلة منحن مشغل على نقطه مزدوجه ولتكن ابعاد هذه النقطه  $h$  و  $s$  فيلزم أن تكون الابعاد حول هذه النقطه تخيلية والا لم تكن منفصله ويفهم من ذلك انه اذا زاد افاق  $h$  كية صغيرة جدا وتكن  $h$  كان الرأسي المطابق لذلك  $d(h + s)$  تخيليا لكن يحدث من متسلسلة تبلور في العموم

$$d(h+s) = v + \frac{v^2}{s^2} + \frac{v^3}{s^3} + \frac{v^4}{s^4} + \frac{v^5}{s^5} + \dots$$

فاذا جعلنا فيها  $s = h$  كان الرأسي الموافق وهو  $v$  آيلا الى  $s$  وبناء عليه يغير في هذه المتسلسلة  $v$  بكمية  $s$  ويرض بهذه الرموز

$$\left(\frac{v}{s}\right) + \left(\frac{v^2}{s^2}\right) + \left(\frac{v^3}{s^3}\right) + \dots$$

لما توول اليه المكررات التفاضلية في هذه الحالة فيوجد

$$d(h+s) = v + \frac{v^2}{s^2} + \frac{v^3}{s^3} + \frac{v^4}{s^4} + \dots$$

ولاجل أن تكون  $d(h+s)$  كية تخيلية يلزم بالاقول أن تكون احدى كيات

$$\left(\frac{v}{s}\right) + \left(\frac{v^2}{s^2}\right) + \left(\frac{v^3}{s^3}\right) + \dots$$

يعني ان فرضية  $s = h + s$  تجعل احدى المكررات التفاضلية

أبلة الى صفر فاذا وقع هذا الشرط كان وجود النقطة المزدوجة في المنحنى محتملا ولكن هذه المعادلة  $\pm = (r + -) \sqrt{r} = r$  مشبها فيؤخذ تفاضلا فيوجد

$$\left( \frac{r}{r} \pm \right) = \frac{r}{r} \left( \frac{r}{r} + \frac{r}{r} \right)$$

وحيث ان هذا المقدار يزول الى كمية تخيلية متى يجعل  $r = -$  ويؤول مقدار  $r$  الى  $r = 0$  يعلم من ذلك ان نقطة التي ابعادها  $r = -$  و  $r = 0$  (شكل ٧٨) يحتمل أن تكون نقطة مزدوجة وتعرف كون هذه النقطة نقطة مزدوجة بالتحقيق بإضافة كمية اصغر من  $r$  على بعد  $r$  وكذا بطرح هذه الكمية من  $r$  على الولا فاذا فعلنا هكذا وجدنا في هاتين الحالتين مقدارين تخيليين لمتغير  $r$  وهذا نستدل على ان هذه النقطة نقطة مزدوجة بالتحقيق

• ١٤٣ • النقط المزدوجة كالنقط المكررة يحتمل وجودها في المنحنى

متى آل مكرر  $\frac{r}{r}$  التفاضلي الى  $\div$  لانه اذا اخذ تفاضلا معادلة

$$k = \frac{r}{r} + c = 1$$
 وقسم الناتج على  $r$  يوجد

$$k = \frac{r}{r} + \frac{r}{r} + \frac{r}{r} = 3$$

ويرى ان مكرر الحد المتبوع بكمية  $\frac{r}{r}$  هو  $k$  فاذا أخذ

التفاضل مرة اخرى شوهد أن  $k$  تكون مكرر الحد المتبوع بـ

$\frac{r}{r}$  ايضا وهكذا يعني انه متى وصل الى المكرر التفاضلي الذي درجته

يوجد ناتج بهذه الصورة



فإذا تطابقت أو اتحدت جميع الحدود المتناظرة لهذين الحقلين كان المنحنيان  
المفروضان منطبقين على بعضهما وأما إذا كان  $\kappa_1 \neq \kappa_2$  فقط  
فلا تكون لهذين المنحنيين النقطة واحدة مشتركة وهي  $m$  كما عرفت

وإذا وجد  $كس = ز$  و  $\frac{واكس}{واس} = \frac{واس}{واس}$  معافان

المُخْبِرِينَ يَقَارِبَانِ مِنْ بَعْضِ مَا زِيَادَةُ وَيُعْظَمُ تَقَارِبُهُمَا وَيُسْتَدْمَنِي كَانَ

$$\frac{f_{\text{مستمر}}}{f_{\text{مستقر}}} = \text{زيادة على المعادلات المتقدمة وهم جزأان الفرق}$$

بين كَيْفِيَّةِ مَحْ، مَحْ يَقِلُّ كَمَا كَثُرَ الْحُدُودُ الْمَتَسَاوِيَةُ فِي الْحُلُولِ الْمَطَابِقَةِ لَهَا

ولتكن بناء على ذلك  $\gamma, \gamma_0, \dots$  الخ ثوابت معادلة  $\gamma = \gamma_0$  كمره

فيمكن أن تأخذ هذه الثوابت مقادير آتيا من غير أن يتغير جنس المتحى لان

معادلة ص<sub>٢</sub> = م<sub>٢</sub> + ٢ ص<sub>١</sub> مثلاً التي يستدل بها على قطع

فانص لا تنتفي الدلالة بها على القطوع النافضة حين تأخذ ثابتاً موه

ای مقدارین لان صورتہ المعادلة لا تختلف (بناء علی عدم تغییر اشارتی م و ۵)

وعدم اخذهما مقادیر صفر)

ويمكن من بعد ذلك نظرياً أن تكون ... الخ الداخلة في معادلات

$$\frac{واحد}{واحد} = \frac{واحد}{واحد} = \frac{واحد}{واحد} = \dots$$

كثواب حيث ما اتفقت أعني اختيارية وبأخذ عدة من هذه المعادلات كعدة

ما يوجد فيهما من الثواب تتعين تلك الثواب بالشروط التي تكون به هذه

المعادلات متحققة مثلاً إذا لم تحتو معادلة صـ = كـ من الأعلى ثوابت 7 و 8 و 9

### الثلاث بوضع

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2}, \frac{a^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2}, \text{ و } a^2 = a^2$$

ويستخرج من هذه المعادلات مقادير  $\alpha$  و  $\beta$  بدلالة  $t_0$  و  $v_0$  و  $w_0$

ونضع تلك المقادير في معادلة  $صه = كسه$  فتقتع هذه المعادلة بهذه الخاصية  
وهي انه متى تغيرت سامتغير سه بكمية  $سه + هـ$  تكون الثلاث حدود الاول  
من الطرف الثاني لمعادلة (٦٧) التي توجد بواسطه قانون تبالول  
مساوية بالتوالي للثلاث حدود الاول من الطرف الثاني لمعادلة (٦٦)  
وما ذكر بخصوص المعادلة التي لا تحتوى الاعلى ثلاث ثوابت يمكن تطبيقه  
على المعادلة التي تحتوى على اكثر من ذلك من الثوابت

\* ١٤٥ \* ولناخذ الحالة التي تدل فيها معادلة  $صه = كسه$   
على خط مستقيم مثلا فتكون تلك المعادلة حينئذ مستعوضة بهذه

$$صه = كسه + - ..... (٦٨)$$

ومعادلات الشرط اللازمة لحذف ثوابت  $هـ$  و  $ز$  تكون

$$صه = كسه + - و \frac{واصه}{واسه} = ز ..... (٦٩)$$

وحيث كانت  $صه$  تبين الرأى في نقطة  $م$  للمنحنى الذى معادلته  
 $صه = كسه$  وكانت  $صه$  توافق  $صه$  أمكن تغيير  $صه$  بكمية  $صه$   
وتؤول معادلات (٦٩) حينئذ الى

$$صه = كسه + - و \frac{واصه}{واسه} = ز$$

وبحذف  $ز$  يوجد

$$صه = كسه + - \frac{واصه}{واسه}$$

وبوضع مقدار  $ز$  المستخرج من هذه المعادلة ومقدار  $ز$  في معادلة (٦٨)  
التي هي معادلة الخط المستقيم تؤول تلك المعادلة الى

$$صه - كسه = \frac{واصه}{واسه} (صه - كسه) ..... (٧٠)$$

وهذه المعادلة هي معادلة بمماس  $م ط$  في نقطة  $م$  التي ابعادها  
 $صه$

بـ و صـ (شكل ٥) وسنعرّف على تماس هذا المستقيم

\* ١٤٦ \* ولنعود للقضية السابقة ولندعم التطويل في العبارة ندع

المنحنيات بمعادلاتها فنقول قدرنا في بند (١٤٤) انه متى تكون

المنحنيين صـ = دـ و صـ = كـ نقطة واحدة مشتركة مرموز

لابعادها برمز صـ و صـ تكون معادلة هذا الشرط كـ = دـ

وبتعيين ثابتين لمعادلة صـ = كـ بواسطة شروط كـ = دـ

$$\text{و } \frac{\text{كـ}}{\text{دـ}} = \frac{\text{كـ}}{\text{دـ}} \text{ يتبدى هذان المنحنيان في التقارب}$$

ولنرمز برمز صـ = دـ لما نتوّل اليه صـ = كـ بعد

ما يوضع فيها مقادير هاتين الثابتين فنحنى صـ = دـ يقال له الالتصاق

برتبة اولى لمنحنى صـ = دـ وكذا اذا حذف بموجب المقادير

الحيث ما اتفقت الممكن اعطاها للتوابث ثلاث ثوابث من معادلة صـ = دـ

بواسطة المعادلات الثلاث الآتية اعني

$$\text{كـ} = \text{دـ} \text{ و } \frac{\text{كـ}}{\text{دـ}} = \frac{\text{كـ}}{\text{دـ}} \text{ و } \frac{\text{كـ}}{\text{دـ}} = \frac{\text{كـ}}{\text{دـ}} \text{ (٧١)}$$

ورمز برمز لـ لما نتوّل اليه كـ بعد وضع مقادير هذه الثوابث

فيها كان منحنى صـ = لـ الالتصاق برتبة ثمانية لمنحنى صـ = دـ

وهو أشدّ قربا له من الالتصاق الذي برتبة اولى وعلى هذا نقص وان وجد

لاجل الالتصاق الثوابث الرتبة معادلات

$$\text{كـ} = \text{دـ} \text{ و } \frac{\text{كـ}}{\text{دـ}} = \frac{\text{كـ}}{\text{دـ}} = \frac{\text{كـ}}{\text{دـ}} \text{ و } \frac{\text{كـ}}{\text{دـ}} = \frac{\text{كـ}}{\text{دـ}} \text{ (٧٢)}$$

\* ١٤٧ \* ولنثبت ان احد الالتصاقين الموجودين بهذه الكيفية

اعني بتغيير ثوابث معادلة واحدة وهو الذي برتبة اقل لا يمكن أن يميزين

الالتصاق الآخر وبين المنحنى المنسوب له هذان الالتصاقان ولاجل ذلك

فرض مثلان م = (شكل ٢٤) يكون معنى م = د  
وم = وهو الذى معادلته م = ل م يكون التصاقه برتبة ثانية وتزيد  
الآن أن ثبت أن الالتصاق م = د م الذى برتبة أولى لا يمكن  
أن يترين معنى م = م و لذلك نضع م + ه محل م في  
هذه المعادلات فيوجد

$$\text{ع}^{\text{م}} \text{ أو د} = (\text{م} + \text{ه}) = \text{د م} + \frac{\text{ه}}{\text{م}} + \frac{\text{ه}^2}{\text{م}^2} + \frac{\text{ه}^3}{\text{م}^3} + \dots \text{ الخ و}$$

$$\text{ع}^{\text{م}} \text{ أول} = (\text{م} + \text{ه}) = \text{ل م} + \frac{\text{ه}}{\text{م}} + \frac{\text{ه}^2}{\text{م}^2} + \frac{\text{ه}^3}{\text{م}^3} + \dots \text{ الخ و}$$

$$\text{د} = (\text{م} + \text{ه}) = \text{د م} + \frac{\text{ه}}{\text{م}} + \frac{\text{ه}^2}{\text{م}^2} + \frac{\text{ه}^3}{\text{م}^3} + \dots \text{ الخ و}$$

وحيث أن معنى م = ل م هو الالتصاق برتبة ثانية لمعنى  
م = د م فيكون

$$\text{ل م} = \text{د م} = \frac{\text{ه}}{\text{م}} = \frac{\text{ه}^2}{\text{م}^2} = \frac{\text{ه}^3}{\text{م}^3} = \dots$$

وغير ذلك توجد بسبب كون معنى م = د م هو الالتصاق برتبة  
أولى لمعنى م = د م هاتان المعادلتان أيضا

$$\text{د م} = \text{د م} = \frac{\text{ه}}{\text{م}} = \frac{\text{ه}^2}{\text{م}^2} = \frac{\text{ه}^3}{\text{م}^3} = \dots$$

ويعتقضى هذه المعادلات تكون

$$دسه' = لسه' = دسه'$$

$$\frac{وا دسه'}{واسه'} = \frac{والسه'}{واسه'} = \frac{واسه'}{واسه'}$$

ويكون

$$\frac{وا دسه'}{واسه'} = \frac{واسه'}{واسه'}$$

واذا جعلنا لاجل الاختصار

$$دسه' + \frac{وا دسه'}{واسه'} = ك$$

$$\frac{وا دسه'}{واسه'} = ر$$

أمكن وضع الثلاث حلول السابقة هكذا .

$$ع'م' أو د (سه' + ه') = ك + ر ه' + \frac{وا دسه'}{واسه'} + \frac{ر ه'}{ر \times ر} + الخ ٠٠$$

$$ع'م' أو ل (سه' + ه') = ك + ر ه' + \frac{وا لسه'}{واسه'} + \frac{ر ه'}{ر \times ر} + الخ ٠٠$$

$$د (سه' + ه') = ك + \frac{وا دسه'}{واسه'} + \frac{ر ه'}{ر \times ر} + الخ ٠٠$$

وبالنظر الى ان جميع الحدود من ابتدا الحد المتبوع بكمية ه' يوجد لها ه' مضر وبامشتر كما يمكن أن يفرض

$$\frac{وا دسه'}{واسه'} + \frac{ر ه'}{ر \times ر} + الخ ٠٠٠ = م ه'$$

وباجراء هذا الاختصار في المعادلات الاخرى يكون

$$د (سه' + ه') = ك + ر ه' + م ه'$$

$$r_{h\odot} + r_{h\nu} + s = (h + m)l$$

$$r_h + r_h \frac{r_s}{r_h} + k = (h + s) d$$

وحيث كان منحيا  $\psi = \psi_0$  و  $\psi = 0$  = له النصاقيين  
احدهما برسة اولى والاخر برسة ثانية يلزم من ذلك أن تخالف كمية  $\psi$  مقدار

$\frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2}$  یعنی انه یکون  $\frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} > 0$  أو  $\frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} < 0$

فَاِذَا كَانَتْ رَاصِعًا مِّنْ اَصْغَرٍ مِّنْ  $\frac{1}{2}$  وَادَسَّ وَاَنْتَ هِيَ زِيَادَةُ  $\frac{1}{3}$  وَادَسَّ

عن سر وجد

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

وإذا كان الامر بالعكس بان كانت  $\frac{a}{b}$  اكبر من  $\frac{c}{d}$  كانت

مکیمۃ سہ سالہ فاذا وضع مقدار  $\frac{1}{4}$  وادسہ ہذا فی مقدار (سہ + ہ)

ولوحظ اشتراك مفروب هـ' الت ثلاث حلول السابقة الى

$$r(a + v) + s = (a + v)s$$

$$h(s + v) + k = (h + s) + v$$

$$h(h_2 + e + r) + k = (h + s)d$$

لكن يجعل ه صغيرة جدًا تكون كمية ٤ غير المنسقة على ه اكبر  
من كميات م ه و ن ه التي تميل نحو الصفر فاذا كانت ٤ موجبة  
عند ذلك فاق ٤ (س + ه) دالتي ٤ (س + ه) و ٤ (س + ه)  
ويعلم من ذلك انه يكون في هذه الحالة ٤ (س + ه) أو ٤ م (شكل ٢٤)  
اكبر من ٤ م ومن ٤ م وهذا يبين ان منحني ص = ٤ م

المتبين

المتبين بخط م م لا يمكن أن يترتب بين المنحنين الآخرين  
وكذا لو كانت كمية  $\epsilon$  سالبة فإنه يكون (سـ + هـ) او حـ م  
اصغر من حـ م ومن حـ م ويكون حينئذ منحنى م م هو الذى يقرب  
من محور الآفاق زيادة فلا يمكن أن يكون محصورا بين الآخرين وهذا  
ما أردنا اثباته

\* ١٤٨ \* يمكن الآن أن نبين السبب الموجب ليكون الخط المستقيم  
(شكل ٥) الذى فى بند (١٤٥) وهو الالتصاقى برتبة اولى مماسا  
بالمحنى لانه ينتج من القضية السابقة عدم امكان مرور مستقيم اخر بين ذلك  
الخط المستقيم وبين المنحنى المفروض وهذه هى خاصية التماس لاحتمالة  
ويقال ان هذا التماس تماس برتبة اولى مع المنحنى وعلى العموم يقال  
للالتصاقى النوفى الرتبة مماس بالمحنى الذى هو التصاقى له تماسا نوفى الرتبة  
و يعلم من ذلك انه متى وجدت بين منحنين هذه المعادلات الثلاث

$$سـ = كـ مـ و \frac{سـ}{مـ} = \frac{كـ مـ}{مـ} = \frac{كـ}{١} = \frac{كـ}{١} = \frac{كـ}{١}$$

كان لهذين المنحنين تماس برتبة ثانية ويكون هذا التماس برتبة  
ثالثة متى توجد زيادة على الثلاث معادلات السابقة هذه المعادلة

$$\frac{سـ^٣}{مـ^٣} = \frac{كـ^٣ مـ^٣}{مـ^٣} = \frac{كـ^٣}{١} = \frac{كـ^٣}{١}$$

\* ١٤٩ \* حيث ان معادلة الدائرة التى هى

$$(صـ - د) + (سـ - ر) = نـ ق$$

تحتوى على ثلاث ثوابت فيمكن أن نعين الدائرة التى يكون لها تماس برتبة ثانية  
مع اى منحنى وليكن م م (شكل ٢٥) المعلوم المعادلة واذلك نفرض ان  
سـ و صـ يكونان بعدى نقطة م من محيط هذه الدائرة فقدر صـ  
يعلم بواسطة معادلة (صـ - د) + (سـ - ر) = نـ ق (٧٢)



\*(١٢١)\*

$$(٧٩) \dots\dots\dots = 1 + \frac{واصر}{واسر} + \frac{واصر}{واسر} (و - و)$$

ومن المعادلة الأخيرة يستخرج

$$(٨٠) \dots\dots\dots \frac{\left(\frac{واصر}{واسر} + 1\right)}{\frac{واصر}{واسر}} = (و - و)$$

وبوضع هذا المقدار في معادلة (٧٨) يحدث

$$(٨١) \dots\dots\dots \frac{\frac{واصر}{واسر} \left(\frac{واصر}{واسر} + 1\right)}{\frac{واصر}{واسر}} = ر - و$$

واذا وضعت مقادير و - و و ر - و هذه في معادلة (٧٧) حدث

$$نق = \frac{\frac{واصر}{واسر} \left(\frac{واصر}{واسر} + 1\right)}{\left(\frac{واصر}{واسر}\right)} + \frac{\left(\frac{واصر}{واسر} + 1\right)}{\left(\frac{واصر}{واسر}\right)}$$

واذا جعت البسوط التي يوجد لها مضروب مشترك يكون

$$نق = \frac{\left(\frac{واصر}{واسر} + 1\right) \left(\frac{واصر}{واسر} + 1\right)}{\left(\frac{واصر}{واسر}\right)}$$

$$نق = \frac{\left(\frac{واصر}{واسر} + 1\right)}{\left(\frac{واصر}{واسر}\right)} \text{ و باخذ الجذر التربيعي يوجد}$$

\*(١٢٢)\*

$$\frac{\frac{3}{4}\left(\frac{v^2}{s^2}+1\right)}{\frac{v^2}{s^2}} \pm = \text{نق}$$

\* ١٥٠ \* تضعيف الاشارة متعلق بوضع نق فاذا كان تعبير

المنحنى متجهاً نحو محور الاآفاق كان  $\frac{v^2}{s^2}$  سالبا على ما في بند (١١٣)

ولاجل أن يكون نق عند ذلك موجبا يؤخذ نق بإشارة السلب ويوضع

$$\frac{\frac{3}{4}\left(\frac{v^2}{s^2}+1\right)}{\frac{v^2}{s^2}} - = \text{نق} \dots\dots\dots (٨٢)$$

لانه متى يتجه تعبير المنحنى نحو محور الاآفاق يقوم  $\frac{v^2}{s^2}$  مقام الكمية

السلبية التي اذا وضعت في مقدار نق جعلته موجبا

\* ١٥١ \* الدائرة التي اعتبرناها يقال لها الدائرة الالتصاقية ويقال

لنصف قطرها نصف قطر الانحناء ويعلم من ذلك انه لا يلزم لايجاد نصف قطر

الانحناء لاى منحنى الا معرفة معادلة هذا المنحنى لنستخرج منها المعادلات

التفاضلية اللازم وضعها في قانون (٨٢)

واذا لم انه يوجه المنحنى تحديده نحو محور الاآفاق يجعل مقدار نق متبوعا

بإشارة موجبة

\* ١٥٢ \* وقد يرقم مقدار نق احيانا بهذه الصورة

$$\frac{\frac{3}{4}\left(\frac{v^2}{s^2}+1\right)}{\frac{v^2}{s^2}} = \text{نق}$$

وهذا

\*(١٢٣)\*

وهذا المقدار يستخرج بسهولة من معادلة (٨٢) لانه اذا اشركت مقامات  
الحدين الموضوعين بين الحافظتين (ونعني بالحافظتين القوسين الحاصرتين  
للحدين المتركب منهما البسط في قانون ٨٢) ولوحظ ان قوة  $\frac{3}{4}$  لكمية  
واسه هي واسه يحدث

$$\frac{\frac{3}{4}(\text{واسه}^2 + \text{واسه}^2 \text{صه})}{\text{واسه}^2 \text{واسه}^2 \text{صه}} = \frac{\frac{3}{4}(\text{واسه}^2 + \text{واسه}^2 \text{صه})}{\text{واسه}^2 \text{واسه}^2 \text{صه}} \quad \text{نق}$$

\* ١٥٣ \* ولنطبق قانون (٨٢) على الامثلة نبحت عن نصف قطر  
الانحناء للقطع المكافئ (شكل ٢٦) وهو الذي معادلته  
 $\text{س}^2 = \text{ع}^2 \text{صه}$

ولذلك نأخذ تفاضل هذه المعادلة فيوجد  $\text{س}^2 \text{واسه} = \text{ع}^2 \text{واسه}$   
ومنه يحدث

$$\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = \frac{\text{س}^2}{\text{ع}^2} \quad \text{نموجود}$$

$$\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} = \frac{\text{ع}^2}{\text{ع}^2}$$

وهذا يؤول قانون (٨٢) الى

$$\frac{\frac{3}{4} \left[ \left( \text{س}^2 + \frac{\text{ع}^2}{2} \right) \frac{1}{\text{ع}^2} \right]}{\frac{1}{\text{ع}^2}} = \frac{\frac{3}{4} \left( \frac{\text{ع}^2}{\text{ع}^2} + 1 \right)}{\frac{1}{\text{ع}^2}} \quad \text{نق}$$

وباجراء رفع المضروبين الى قوة  $\frac{3}{4}$  يوجد

$$(٨٢) \quad \dots \frac{\frac{3}{4}(\text{س}^2 + \frac{\text{ع}^2}{2})}{\frac{1}{\text{ع}^2}} = \frac{\frac{3}{4}(\text{س}^2 + \frac{\text{ع}^2}{2})}{\frac{1}{\text{ع}^2}} \quad \frac{1}{\text{ع}^2} = \text{نق}$$

ولكن مقدار الخط العمودي للقطع المكافئ يساوى  $\frac{1}{\text{ع}^2}(\text{س}^2 + \frac{\text{ع}^2}{2})$

فيتضح من هذا ان نصف قطر الانحناء المقطع المكافئ يساوى لمكعب الخط العمودى مقسوما على مربع نصف الخط القياسى له (وبالبحث عن نصف قطر الانحناء لمعادلة ص<sup>٢</sup> = م<sup>٢</sup> س + د<sup>٢</sup> س<sup>٣</sup> الدالة على جميع الخطوط المنحنية التى بدرجة ثانية بحسب كمية د يتحقق صحة ما ذكره لجمع المنحنيات التى بدرجة ثانية)

\* ١٥٤ \* ويمكن استعمال الدائرة الالتصاقية فى تقدير انحناء أى منحني فى أى نقطة ولتكن م (شكل ٢٥) لانه اذا رسمنا من هذه النقطة قوسا صغيرة جدا ولتكن م ل بنصف قطر يساوى نصف قطر الانحناء فى هذه النقطة أمكن اعتبار هذه القوس كفوس من المنحنى لانه يكاد أن ينطبق عليه لكن حيث ان انحناء م ل يكبر كلما صغر نصف قطره يعلم من ذلك انه يمكن ادراك انحناء المنحنى وصغره بواسطة صغر نصف قطر انحنائه وكبره

فاذا اعتبرنا مثلا معادلة (٨٣) التى يحدث منها نصف قطر الانحناء المقطع المكافئ شاهدا انه يكون فى رأس المنحنى التى فيها س = ٠ مقدار نصف قطر الانحناء هكذا نق =  $\frac{c}{2}$  وحيث انه متى تزداد س على التوالى تزداد كمية نق يستدل بذلك على ان انحناء المقطع المكافئ يأخذ فى النقص كلما بعد عن رأسه

\* ١٥٥ \* حيث ان كمية  $\frac{واص}{واس}$  تبين ظل الزاوية التى تقع بين المماس فى نقطة م (شكل ٢٧) وبين محور الاتفاق لمعادلة الخط العمودى الماتر بالنقطة التى ابعادها ر و و تكون

$$ص - و = \frac{واص}{واس} (س - ر)$$

وهذه المعادلة هى كمعادلة (٧٨) التى فيها ر و يبينان بعدى مركز الدائرة الالتصاقية فىرى من ذلك ان نصف قطر هذه الدائرة هو خط عمودى

على المنحنى

• ١٥٦ • إذا رسمنا الآن من جميع نقط منحني وليكن ممّ م' .. الخ  
 (شكل ٢٨) انصاف أقطار انحنائية م و م' و م' و م' و م' .. الخ احدثت  
 قط و و و و ..... الخ التي هي مراكز الدوائر الالتصاقية  
 المارة بنقط م و م' و م' ..... الخ خطا منحنيا جميع قطعه  
 توجد تحت قاعدة واحدة (داخلة في معادلة منحنى ممّ م' ..... الخ  
 لأنه متى يعلم هذا المنحنى تنتج منه مواضع جميع تلك النقاط) وذلك المنحنى  
 يعنى المركب من نقط و و و و ..... الخ يسمى مفرد منحنى ممّ م' .. الخ  
 ومنحنى ممّ م' .. الخ يقال له الانفراد اذا اعتبر بالنسبة الى المفرد

١٥٧\* متى ينتقل من نقطة الى اخرى من المفرد فلا تتغير كيتا موصلة  
قطر ولكن تتغير ايضا كيات ر و ز و ثي معالان كيتي ر و و  
هما على وجه العموم بعدا مركز الدائرة الالتصاقية وحيث ان المفرد متكون  
من جله هذه المراكز يعلم ان كيتي ر و و هما بعدا هذا المنحنى  
يعنى بعدا اى نقطة منه فيستغيران من نقطة الى اخرى من المنحنى وكذا تتغير كية  
ثي التي هي نصف قطر الدائرة الالتصاقية وتبين بعد اى نقطة من المفرد الى  
اخرى من الانفراد ومن ثم يكون بأخذ تفاضل معادلة (٧٨) بالنسبة الى جميع  
الحروف [ ولا يمكن أخذ تفاضل معادلة (ص-و) + (س-ر) = ثي<sup>٢</sup> ]  
ومشتقاتها بخلاف ذلك وما يترأى من العمل بخلاف ذلك في استنتاج  
معادلات (٧٥) (٧٦) من معادلة (٧٣) يجاب عنه انه حيث كانت  
هذه المعادلة تحتوى على ثابتين غير متعينتين لزم أن تعين هذه الثوابت  
بواسطة شرط كون الدوال المتينة بالاطراف الاول لمعادلات (٧٥) و (٧٦)  
تجعل مساوية للصفر وبدون ذلك لم تكن نستدل على انه يستلزم من وقوع  
معادلة (٧٣) وقوع معادلات (٧٥) و (٧٦) [ وبالقيمة على (و) س ]

$$\therefore = \frac{وا}{واسه} - 1 + \frac{وا}{واسه} \frac{واصه}{واسه} - \frac{واصه}{واسه} + \frac{واصه}{واسه} (د - د)$$

• (١٢٦) •

وبطرح معادلة (٧٩) من هذه المعادلة يبقى

$$0 = \frac{\text{واو}}{\text{واسه}} - \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} -$$

ويستخرج من ذلك

$$\frac{1}{\frac{\text{واو}}{\text{واسه}}} \times \frac{\text{واو}}{\text{واسه}} - = \frac{\frac{\text{واو}}{\text{واسه}}}{\frac{\text{واو}}{\text{واسه}}} - = \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$$

وحيث يعلم من بند (٦٧) ان  $\frac{1}{\frac{\text{واو}}{\text{واسه}}} = \frac{\text{واسه}}{\text{واو}}$  يكون

$$\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} \times \frac{\text{واو}}{\text{واسه}} - = \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$$

ويكون بموجب بند (٢٤)

$$\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} - = \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$$

واذا وضعنا مقدار  $\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$  هذا في معادلة (٧٨) حدث

$$\text{صه} - \text{و} = \frac{\text{واو}}{\text{واسه}} (\text{سه} - \text{ر}) \dots \dots \dots (٨٤)$$

\* ١٥٨ \* قدرأينا في بند (١٥٥) ان معادلة

$$\text{صه} - \text{و} = \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} (\text{سه} - \text{ر})$$

هي معادلة نصف قطر الانحناء المار بالنقطة التي ابعادها سه و صه

فتبديل  $\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$  بكمية  $\frac{\text{واو}}{\text{واسه}}$  لم تزل هذه المعادلة دالة على نصف

قطر



• (١٢٨) •

ويستخرج من ذلك بواسطة ضرب الطرفين في  $واسه$

$$واقو = \sqrt{واسه^2 + واسر^2} \text{ وهو المطلوب}$$

• ١٦٠ • وهذه الكيفية يوجد لاجل المفرد الذي ابعاده  $رو$

$$واقو = \sqrt{واسر^2 + واسد^2}$$

• ١٦١ • نأخذ الآن تفاضل معادلة (٧٧) بالنسبة لجميع

الحروف فيحدث لنا

$$(صه - و) (واسه - واسر) + (وسر - ر) (واسه - واسر) = تقواق$$

ويحدث من معادلة (٧٨)

$$صه = (واسه - واسر) + (وسر - ر) واسه$$

فاذا طرحنا هذا الناتج من المعادلة السابقة بقي لنا

$$- (صه - و) (واسه - واسر) - (وسر - ر) (واسه - واسر) = تقواق \dots\dots\dots (٨٥)$$

واذا وضعنا في معادلة (٨٥) هذه في معادلة (٧٧) مقدار  $صه - و$

المستخرج من معادلة (٨٤) حدثت لنا هاتان المعادلتان

$$\frac{واسد}{واسر} (وسر - ر) - (وسر - ر) (واسه - واسر) = تقواق$$

$$\frac{واسد}{واسر} (وسر - ر) + (وسر - ر) (واسه - واسر) = تقواق$$

ولما يوضع  $وسر - ر$  مضروباً بامشتركاً ويؤخذ الجذر التربيعي للمعادلة

الثانية تؤول هاتان المعادلتان الى

$$- (وسر - ر) \frac{واسد + واسر}{واسر} = تقواق$$

$$(وسر - ر) \frac{\sqrt{واسد^2 + واسر^2}}{واسر} = تقواق$$

١٢٩

وبقسمة الاولى من هاتين المعادلتين على الثانية يوجد

$$\frac{قو}{قوس} = \frac{قو + قوس}{قوس}$$

وبحيث انه يوجد في بند (١٦٠) بالرمز قو قوس من المقروء

$$قو = قو + قوس$$

فإذا طوبقت هذه المعادلة بالسابقة حدث من ذلك

$$قو = قو + قوس$$

$$قو + قوس = قوس$$

$$قو + قوس = ٠$$

وبسبب كون كل دالة تفاضلها صفر هي كمية ثابتة يعلم ان حاصل جمع قو + قوس يبين كمية ثابتة وينبئ على ذلك انه بازدياد نصف قطر الانحناء ينقص القوس المرموز له برمز قو بمقدار تلك الزيادة والعكس بالعكس وتشرح هذه القضية بهذه الكيفية وهي ان نصف قطر الانحناء يتغير بفروقات مساوية للفروقات التي تحدث عند تغير القوس من المقروء

\* ١٦٢ \* ليكن (شكل ٢٩) م = قو و قو = قوس  
و م = قو = قو + قوس = قو  
قو + قوس = ثابتة أو

م + قوس = ثابتة (٨٦)  
وكذا توجد لاجل نصف قطر الانحناء م = قو هذه المعادلة  
قو + قوس = ثابتة أو

م + قوس = ثابتة (٨٧)  
وبحيث ان الاطراف الثانية لمعادلتى (٨٦) و (٨٧) تبين كمية ثابتة  
واحدة على ما بينه البند المتقدم يوجد من ذلك

$$م + قوس = قوس + قوس = قوس$$

$$م = قوس - قوس = قوس - قوس = قوس$$

ويعلم من ذلك ان الفرق بين اى نصفي قطرين من انصاف الاقطار الانحنائية يساوى القوس المحصور بينهما أبداً

\* ١٦٣ \* وينتج من ذلك انه اذا اثني خيط على المقروء الذى هو  $\theta$  (شكل ٢٩) وانهى بمماس به وكان ممبنا في نقطة  $\mu$  من الانفراد الذى هو  $\theta$  ثم فرد هذا الخيط باقائه مشدودا على الدوام رسم طرفه  $\mu$  في تحركه منحنى الانفراد  $\theta$  لانه اذا ألقى في موضع  $\omega$  بتحركه يزداد بقدر قوس  $\omega$  ومن ثمة يساوى في الطول نصف قطر الانحناء الذى يمر بنقطة  $\omega$  ومنه يفهم ان طرف  $\mu$  لهذا الخيط يكون موجودا على المنحنى الانفرادى

\* ١٦٤ \* وهما هي كيفية ايجاد معادلة المنحنى المقروء يستخرج اولاً من معادلة المنحنى المراد ايجاد مقروءه مقادير  $\theta$  والمكدرات التفاضلية  $\frac{\partial \theta}{\partial \mu}$  و  $\frac{\partial \theta}{\partial \omega}$  الخ ثم توضع هذه المقادير في معادلات (٧٨) و (٧٩) فيحدث من ذلك معادلتان مشتملتان على متغير  $\theta$  فيحذف هذا المتغير من بينهما فتنشأ عن ذلك معادلة محتوية على  $\omega$  و  $\mu$  فتكون هي معادلة المنحنى المقروء المطلوبة

\* ١٦٥ \* ولنعين بهذه الطريقة مقروء القطع المكافئ الذى معادلته  $\mu^2 = c \theta$  فنأخذ تفاضل هذه المعادلة ليستخرج منه

$$2\mu d\mu = c d\theta \text{ ومن ثمة } \frac{d\mu}{d\theta} = \frac{c}{2\mu}$$

$$\text{و } \frac{d\mu}{d\theta} = \frac{c}{2\mu}$$

فتوضع في معادلات (٧٨) و (٧٩) مقادير  $\mu$  و  $\frac{d\mu}{d\theta}$  و  $\frac{\partial \mu}{\partial \theta}$  هذه لتحدث المعادلتان المشتملتان على  $\theta$

• (١٣١) •

$$(٨٨) \dots\dots\dots ٠ = ر - سه + \frac{سه^٢}{ح} (و - \frac{ر}{ح})$$

$$(٨٩) \dots\dots\dots ٠ = ١ + \frac{ر^٢}{٢ح} + \frac{ر}{ح} (و - \frac{سه}{ح})$$

ثم نطرح معادلة (٨٨) من معادلة (٨٩) بعد ضربها في سه فيبقى

$$(٩٠) \dots\dots\dots ٠ = \frac{٣سه^٤}{٢ح} + ر$$

وغير ذلك يوجد بضرب معادلة (٨٩) في ح واختصارها

$$سه^٦ - ح^٢ + و + ح' ومنه يستخرج$$

$$(٩١) \dots\dots\dots \frac{ح}{ر} + \frac{سه^٣}{ح} = و$$

ويحذف سه من بين معادلتى (٩٠) و (٩١) توجد معادلة المفرد

لكن قبل أن تعمل هذه العملية نأبه ان معادلتى (٩٠) و (٩١)

يؤولان لاجل النقطة الاصلية التى فيها سه = ٠ الى ر = و و  $\frac{ح}{ر} = و$

فناخذ ان  $ا - ح = ح$  (شكل ٣٢) فتوجد نقطة ر من المفرد

ثم يرى بواسطة معادلة (٩١) انه بأخذ متغير سه مقادير موجبة

اوسالبة يزداد متغير و كلما ازدادت هذه المقادير وينتج من ذلك ان المفرد

يتركب من طيتين ر و د

\* ١٦٦ \* ولاجل حذف سه من بين معادلتى (٩٠) و (٩١) نزع

الاولى بعد أن يستخرج منها سه فيوجد

$$سه^٤ = ر \frac{ح}{١٦}$$

ثم يستخرج من معادلة (٩١)

$$سه^٦ = (و - \frac{ح}{ر}) \frac{ح}{ر} \text{ وبكعب الطرفين يكون}$$

$$سه^٦ = (و - \frac{ح}{ر})^٢ \frac{ح^٢}{٢٧}$$

وبمساواة مقدارى سه يعضهما وقسمة الناتج على ح يوجد

$$ر \frac{١}{٢٧} (و - \frac{ح}{ر}) = \frac{ح}{١٦}$$

واذا رمزنا برمز و لكمية و -  $\frac{ح}{ر}$  وضربنا طرفى هذه المعادلة فى ٢٧ يحدث

$$و = ر \frac{٢٧}{١٦} = ر د$$



لا فاق واحد  $\text{ه} + \text{ه}$  يكون

$$(\text{ه} - \text{ه}) \text{ه}^2 + \text{الخ} \dots\dots\dots (٩٣)$$

واذا فرضنا الآن ان الفاق يصير  $\text{ه} - \text{ه}$  يلزم تغيير كية  $\text{ه}$  بكمية  $\text{ه}$  في فضل الراسيين فيؤول الى

$$-(\text{ه} - \text{ه}) \text{ه}^2 + \text{الخ} \dots\dots\dots (٩٤)$$

وحيث كان الحد الاول من متسلسلى (٩٣) و (٩٤) يمكن أن يفوق مجموع الحدود الباقية بأخذ كية  $\text{ه}$  صغيرة على قدر الكفاية ينتج منه ان فضل الراسيين يتغير في الاشارة متى يصير الفاق  $\text{ه} - \text{ه}$  بعد ان كان  $\text{ه} + \text{ه}$  وينبئ على ذلك انه اذا كان فرق الراسيات الموافقة لفاق  $\text{ه} + \text{ه}$  كية موجبة بأخذ (شكل ٣٦)  $\text{ع} = \text{ع} = \text{ع}$  معناها انه اذا كان الرأسى  $\text{ع}^{\text{م}}$  للمخنى يفوق  $\text{ع}^{\text{د}}$  يكون الرأسى  $\text{ع}^{\text{د}}$  للاتصاقى فاتقا الرأسى  $\text{ع}^{\text{م}}$  للمخنى وينتج من ذلك ان الالتصاقى يوجد في احد الوجهين فوق المخنى وفي الوجه الآخر تحته فاذن يقطعه وهذا ما أردنا اثباته

وما ذكر بخصوص الدائرة التى هى التصاقى برتبة ثانية يمكن تطبيقه على جميع الالتصاقيات المزدوجة الرتبة

\* ١٦٩ \* ويتضح من بعد الاثبات السلبى انه متى كان الالتصاقى برتبة مفردة كان مماسا بالمخنى ولا يقطعه وهو ظاهر من بعد الاثبات السابق

\* ١٧٠ \* ولنذكر القضية الموعود بها ابتها في بند (١٧٠) على

النقط المماس  $\text{ر}$  على ما هو مشروح في بند (١٣٨) فنقول اذا كانت المخنيتان التجميعية في احدى هذه النقط لهما مماس مشترك ولتكن معادلته  $\text{ص} = \text{د} + \text{د}$  تغير  $\text{د}$  بكمية  $\text{د} + \text{د}$  في ثانية معادلتى (٩٢) فيحدث من ذلك  $\frac{\text{د} + \text{د}}{\text{د}}$  أو  $\text{د} = \text{د}$  وجميع المكررات

الاخر اهذه المعادلة تكون اصفا را وبسبب كون المماس التصاقيا برتبة

اولى تساوى كمية دمه + ده كمية كرسه + هـ وبذلك يتوول  
فرق معادلتى (٩٢) الى

$$صه - صه = هـ + هـ + هـ + ..... الخ$$
  
وفرق الراسين هذا يلزم أن يوجد له مقداران كم و كم (شكل ٣٠)  
ولذلك يجب أن يكون لاحد المكثرات التفاضلية المتبينة بهذه الرموز

$$١ و ٢ ..... الخ مقداران وليكن  $\frac{قاصه}{قاسه}$  هو هذا المكثر$$

التفاضلى لكن حيث انه اذا أخذت التفاضلات المتوالية لمعادلة ح و صه  
+ ك و صه = ٠ لا يزال حد ك باقيا مضروباً فى التفاضل برتبة  
عليا للكمية صه فى كل تفاضل فعل على ما تقرر فى بند (١٤٣) يعلم  
من ذلك ان التفاضل برتبة د للدالة المفروضة يمكن وضعه  $\frac{قاصه}{قاسه}$  كذا

$$ك + \frac{قاصه}{قاسه} = ٠$$
 ويلزم أن يوجد للمكثر  $\frac{قاصه}{قاسه}$  التفاضلى

مقداران ويثبت ان كمية ك تكون صفرا كما فى بند (١٣٧) وبمقدار ك

هذا يتوول مقدار ح الى صفرا ايضا وتوول معادلة  $\frac{قاصه}{قاسه} = - \frac{ع}{ك}$

حينذ الى  $\frac{قاصه}{قاسه} = \div$  وهو المراد اثباته

\* (تطبيق قضية تبلور على الدوال المتزايدة التى بمتغيرين) \*

\* ١٧١ \* متى يتغير فى دالة ع المشتملة على متغيرين صه و صه

غير المرتبطين بمتغير صه بكمية صه + هـ ومتغير صه بكمية صه + ك  
يمكن حل هذه الدالة بواسطة قضية تبلور لانه اذا استبدلت اولا كمية صه  
بكمية صه + هـ يوجد



\*(157)\*

\* ۱۷۲ \* واذا فعل هذا التبديل وجه معا كس يوجد اولاً بتغيير

ص. بكمية ص. + ك

$$\frac{a}{x} + \dots + \frac{r_k}{r \times r} \frac{e'_k}{e'_k + e'_k + e'_k} + \frac{r_k}{r} \frac{e'_k}{e'_k + e'_k + e'_k} + k \frac{e'_k}{e'_k + e'_k + e'_k} + e = (k + m, m, m) d$$

ثم ينتهي بوضع  $\mathbf{e} + \mathbf{h}$  محل  $\mathbf{e}$  في كل حد الى هذا الناتج

$$(17) \left\{ \begin{array}{l} x \dots + \frac{r}{r} \frac{e'G}{G^r} + \frac{eG}{G^s} + e = (e + s + k + v) \\ x \dots + k \frac{\frac{eG}{G^v} \cdot G}{G^s} + k \frac{eG}{G^v} \\ x \dots + \frac{r}{r} \frac{e'G}{G^r} + \\ x \dots + \end{array} \right.$$

وحيث كان الترتيب الذي فعلت به هذه التبديلات بالاخيار لانه يجب وضع  
 هـ + هـ في جميع الحالات التي تدخل فيها هـ ووضع صه + ك  
 في جميع المواضع التي تدخل فيها صه فلا تؤثر هذه العمليات على بعضها  
 ومنه ينتج وجوب تطابق حل (٩٦) و (٩٧) وعليه يبنى اتحاد مقادير  
 الحدود المتبوعة بمجاول ضروب متحدة في هـ و ك فاذا ساوينا

الحدود المضروبة في هكذا ببعضها نجد

اووه والاوی

و يفهم من هذه المعادلة ان ترتيب التفاضل في اخذ التفاضل الثاني لحاصل

شعب

\*(١٣٧)\*

ضرب متغيرين اوى دالة بمتغيرين اختياري ويعرف ايضا ان ترتيب  
المكدرات التفاضلية بدرجة عليها واختياري بمساواة المكدرات التفاضلية  
للحدود الاخرى من معادلتى (٩٦) و (٩٧) ببعضها والله اعلم  
\*(فى النهايات الكبرى والصغرى للدوال التى بمتغيرين)\*

\* ١٧٣ \* قد رأينا فى بند (١٧١) انه اذا غير  $ص$  بكمية  
 $ص + هـ$  ومتغير  $ص$  بكمية  $ص + ك$  فى الدالة المشتملة  
على متغيري  $ص$  و  $ص$  غير المرتبطين بعلم حل  $ك$  ( $ص + هـ$  و  $ص + ك$ )  
بمعادلة (٩٦) فاذا بينا  $ك$  ( $ص + هـ$  و  $ص + ك$ ) فى هذه المعادلة

$$\text{برمن } ع \text{ و } ك \text{ برمن } هـ \text{ و } \frac{ع}{ص} \cdot \frac{ع}{ص} \text{ برمن } \frac{ع}{ص} \text{ نجد}$$

$$ع = ع + هـ \left( \frac{ع}{ص} + م \frac{ع}{ص} \right) + \frac{ع}{ص} \left( \frac{ع}{ص} + م \frac{ع}{ص} \right) + \frac{ع}{ص} \left( \frac{ع}{ص} + م \frac{ع}{ص} \right)$$

+ الحدود المحتوية على  $هـ^٢$  و  $هـ^٣$  الخ ... (٩٨)  
ولاجل أن تكون  $ع$  نهاية كبرى او صغرى يلزم أن نجعل بعض المقادير  
المعطاة الى  $هـ$  و  $ك$  كمية  $ع$  اكبر من  $ع$  ابدأ أو اصغر منها ابدأ

ولا يقع ذلك الا اذا كان حد  $هـ \left( \frac{ع}{ص} + م \frac{ع}{ص} \right)$  صفرا لانه اذا لم يكن

كذلك أمكن صيرورة هذا الحد اكبر من حاصل الجمع الجبرى لجميع الحدود  
التي تليه بواسطة مقدار لايق لكمية  $هـ$  كما فى بند (٨٩) وبأخذ هذا  
المقدار على التعاقب موجبا وسالبا نصير  $ع$  فى احدى الحالتين اكبر من كمية  
 $ع$  وفى الاخرى اصغر منها وبعلم حينئذ انه لتكون دالة  $ع$  هذه نهاية كبرى  
او نهاية صغرى يلزم ان يوجد

$$هـ \left( \frac{ع}{ص} + م \frac{ع}{ص} \right) = ٠ \text{ أو وهو الاول}$$

• (١٣٨) •

$$١٠ = \frac{ع}{م} + ٢ \frac{ع}{م}$$

وحيث كانت الزيادة  $\epsilon$  حيث ما اتفقت تكون  $m$  كذلك ولا تزال المعادلة  
حينئذ واقعة مهما كانت  $m$  وذلك يقتضى أن تنقسم هذه المعادلة الى هاتين

$$\frac{ع}{م} = ١٠ \quad \text{و} \quad \frac{ع}{م} = ١٠$$

• ١٧٤ • نبحث الآن عما يميز النهاية الكبرى من الصغرى ولذلك  
ننبه انه حيث كان الحد المشتق على  $هـ$  صفرا فالحد المحتوى على  $هـ$   
يكون هو المتع بإشارة حاصل الجمع الجبرى لجميع الحدود التى تأتى بعد  $ع$   
ويلزم حينئذ أن الحد المشتق على  $هـ$  ان كان غير صفرا لا يكون متعينا  
بواسطة مقادير  $هـ$  و  $\epsilon$  موجبات اشارة وسالبا أخرى واللا كانت  $ع$   
فى احدى الحالتين اصغر من  $ع$  وفى الحالة الاخرى اكبر منها وحيث كان  
الامر كذلك فنشرع فى البحث عن الشرط اللازم وقوعه ليحفظ الحد المشتق  
على  $هـ$  اشارة واحدة مهما كانت المقادير المعطاة الى كيتى  $هـ$  و  $\epsilon$   
وفى هذا البحث نبين الحد المحتوى على  $هـ$  من معادلة (٩٨) بهذا الرمز

$$\frac{1}{r} هـ (م + ٢ - م + ع)$$

وبوضع  $r$  مضروبا مشتركا بول هذا الحد الى

$$\frac{1}{r} هـ (م + ٢ - م + ع + ٠٠٠٠ \frac{ع}{r}) \quad (٩٩)$$

وبإضافة كمية  $\frac{1}{r} - \frac{1}{r}$  التى مقدارها صفرا على ما بين الحافظتين  
يمكن وضع كمية (٩٩) هكذا

$$\frac{1}{r} هـ (م + ٢ - م + ع + \frac{1}{r} - \frac{ع}{r}) \quad (١٠٠)$$

ويرى انها تكون بإشارة  $r$  متى اتحد  $ع$  و  $r$  فى الاشارة وكان  
 $\frac{ع}{r} < \frac{1}{r}$  يعنى  $ع < ١$  لان الكمية المضروبة فى  $\frac{1}{r} هـ$  حينئذ  
تكون

تكون موجبة وإشارة كمية (١٠٠) تتعلق بإشارة  $\gamma$  واذن توجد  
بنهاية كبرى أو نهاية صغرى بحسب كون  $\gamma$  سالبة أو موجبة يعنى

بحسب إشارة  $\frac{w}{v}$  المتخذة مع إشارة  $\frac{w}{v}$  حيث انه شوهد أن

$\gamma$  و  $\gamma$  يفرضان بإشارة واحدة

\*(فى تحويل الاحداثيات المستقيمة الى احداثيات قطبية)\*

\* ١٧٥ نعتبر منحنى  $rs$  (شكل ٧٩) المتعين فيه موضع  
نقطة  $m$  بواسطة الاحداثيات المستقيمة  $ac = sm$  و  $cm = sv$   
وهذه النقطة يمكن تعيينها كذلك اذا علمت زاوية  $mac$  والنصف  
قطر الاحتراق  $am$  ولما كانت الزوايا تقاس بالاقواس عادة استبدلت  
زاوية  $mac$  بقوس  $m$  و المرسوم بنصف قطر مأخوذ وحدة ومن ثم يمكن  
استعواض الاحداثيات القطبية التى هى  $m$  و  $v = am = c$   
بالاحداثيات المستقيمة  $ac = sm$  و  $cm = sv$

\* ١٧٦ \* ولينأمل ان مبدأ الآفاق قد يكون بعض الاوقات غير  
نقطة و لانه يمكن تعيين نقطة  $m$  كذلك اذا اعتبرت نقطة  $w$  نقطة  
الابتداء وعلم قوس  $wm$  ونصف قطر  $am$  الاحتراق وفى هذه الحالة  
يمكن أن نرسم قوس  $wm$  برمز  $v$  وحينئذ جميع الآفاق المحسوبة  
من مبدأ  $w$  تختلف عن الآفاق المحسوبة من مبدأ  $v$  بكمية ثابتة  
هى  $wv$  وتوجد بينها اى بين تلك الآفاق المتخالفة هذه المعادلة  
 $v = w - wv$

وحيث انه يمكن بواسطة هذه المعادلة تغيير المبدأ بما يناسب نفرض ان هذا  
المبدأ يكون  $w$  لاجل السهولة

\* ١٧٧ \* ولكن الآن  $d$  ( $sm$  و  $sv$ ) =  $0$  المعادلة التى يراد  
أن تتغير فيها الاحداثيات المستقيمة  $ac = sm$  و  $cm = sv$   
بالاحداثيات القطبية  $m$  و  $v = am = c$  فنبحث عن

\* (١٤٠) \*

التعادل والارتباط الذي يقع بين هذه الاحداثيات ولذلك نتظر انه يوجد

$$اع = ام جتا ماع و حم = ام جاماع أو$$

$$سم = ع جتا ے و صه = ع جاع ..... (١٠١)$$

وينبغي حينئذ وضع هذه المقادير في معادلة د (سم و صه) = ٠

لتحدث المعادلة المنسوبة الى احداثيات قطبيه

\* ١٧٨ اذا كانت النقطة الاصلية للاحداثيات المستقيمة سم و صه

ليست في مركز ا للمنحنى (شكل ٨٠) وكانت ر و و الاحداثيات

المركز ا و سم و صه الاحداثيات المحسوبة من ا حدث

$$اع = اك - اء و م = مك - ام$$

$$أو سم = سر - ر و صه = صه - وه$$

ويلزم وضع هذه المقادير في القواوين السابقة

\* (في تحويل الاحداثيات القطبيه الى اخرى مستقيمة وتعيين الكمية

التفاضلية لقوس في منحن قطبي) \*

\* ١٧٩ \* المعادلة المنسوبة الى احداثيات قطبيه بينها

$$د (ے و ع) = ٠$$

وبشاهد اولاً كما في (شكل ٧٩) انه يمكن ابدال ع بمقدارها المستخرج

من معادلة

$$ام' = اع' + حم' أو$$

$$ع' = سم' + صه' ..... (١٠٢)$$

وبالنظر الى ے تقسم معادلتى (١٠١) على بعضهما فيوجد

$$\frac{صه}{سم} = \frac{طا}{ظا} = ظا ے ويسـتخرج من ذلك$$

$$ے = قوس (ظا = \frac{صه}{سم})$$

وبوضع مقدار ے هذا مع مقدار ع في معادلة

$$د (ے و ع) = ٠ يوجد$$

$$د [قوس (ظا = \frac{صه}{سم}) و \sqrt{سم'^2 + صه'^2}] = ٠ \quad (١٠٣)$$

وهذه

وهذه معادلة مشقة على  $س$  و  $ص$  وعلى كمية عالية  
 \* ١٨٠ \* ويمكن ايضا إيجاد معادلة بين  $س$  و  $ص$  غير محتوية  
 على الكمية العالية التي هي قوس (ظا =  $\frac{ص}{س}$ ) لكنها تكون  
 مشقة على كيات تفاضلية وذلك نأخذ تفاضل معادلة (١٠٣)  
 أو نستعمل الطريقة الآتية حيث كانت هي المعادة ونرمز برمز  
 (ع و  $س$ ) = ٠ للمعادلة المراد تحويلها الى معادلة ذات احدائيات  
 مستقيمة  $س$  و  $ص$  والسبب الموجب لبحسنا اولا عن حذف  $س$   
 من بين معادلة (ع و  $س$ ) = ٠ وتفاضل هذه المعادلة المرموز له برمز  
 (ع و  $س$  و  $ص$  و  $ع$ ) = ٠ هو كونه مقدار  $ع$  يمكن  
 بيانها على موجب بند (١٧٩) بتغيري  $س$  و  $ص$  بدون كمية  
 عالية ولا يمكن بيان مقدار  $س$  كذلك وبالحقيقة متى تحذف كمية  $س$   
 تكون المعادلة الحادثة مشقة على  $ص$  و  $ع$  وهذه التفاضلات  
 يمكن بيانها بدلالة متغيرات  $س$  و  $ص$  و  $ع$  و  $ص$  و  $ع$  و  $ص$   
 هذا ونستخرج من معادلة (١٠١)

جاء  $ع = \frac{ص}{س}$  و  $ص = \frac{ع}{س}$  ..... (١٠٤)  
 ونقسم احدى هاتين المعادلتين على الاخرى فيوجد

$\frac{ص}{ع} = \frac{ع}{ص}$  أو ظا  $ع = \frac{ص}{س}$  ثم نأخذ تفاضل الطرفين فيجد

$$\frac{ص - ص}{س} = \frac{ع - ع}{ص}$$

وبدل  $\frac{ص}{ع}$  بمقداره المستخرج من المعادلة الاولى من معادلتى (١٠٤)  
 ثم نقطع القاسم المشترك  $س$  فينشأ عن ذلك .

$$ع - ع = ص - ص$$

$$ع = \frac{ص - ص}{ع} \dots\dots (١٠٥)$$

•(115)•

وبوضع مقدار غ عوضا عنه في هذه المعادلة الأخيرة يكون

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b$$

وتفاضل المتغير الآخر يوجد أيضا باعظم سهولة لانه يحدث من معادلة (١٠٢)

$$e = \gamma + \gamma' \quad \text{و بأخذ التفاضل يوجد}$$

$$\frac{\text{سواء} + \text{سواء}}{\text{سواء} + \text{سواء}} = ٤٦$$

وبواسطة مقادير واء و واء و ع السابقة تتغير المعادلة الحادثة  
من حذف ٤ بمعادلة اخرى لا تحتوى الا على م و ص و واء و واء  
واذن تنسب الى اخدائيات مستقيمة وتكون هي المعادلة المبحوث عنها  
\* ١٨١ \* قدرأيتافى بند (١٥٩) ان كمية تفاضل القوس المرموز له  
برمز قو المنسوب الى اخدائيات مستقيمة هي

فانو =  $\gamma \sqrt{v^2 + c^2}$  ..... (١٠٦)

فيمكن تعيين تفاضل هذا القوس متى تكون الاحداثيات قطبيه وفي هذه الحاله  
نوضع في معادله (١٠٦) مقادير  $\omega$  و  $\omega'$  المستخرجه من معادلاته

سہ = ع جتاے و صدہ = ع حائے

ويوجد ياخذ تفاضل هذه المعادلات

وہ = ع - ح + ج = ع

وامہ = ع جتاے واے + تاے واے

قرب هذه المعادلات ونختصرها بمساعدة معادلة

خاے + جتاے = ۱ فیضاً عن ذلک

$$\gamma = \epsilon' b' + \epsilon' a'$$

وهو تفاضل القوس بدلالة الاحداثيات القطبية

۴۴۰

• (١٤٣) •

(في تحت المماس ومحب العمودي والعمودي والمماس للمنحنيات القطبية)

\* ١٨٢ \* حقيقة تحت المماس ح ع (شكل ٨١) في المنحنيات ذات الاحداثيات المستقيمة هو الجزء المحصور بين موقع ح للرأسي وبين نقطة ع التي يقطع فيها خط ا ع العمودي على هذا الرأسي مماس م ط وهذا التعريف يتماز في المنحنيات القطبية التي ليس للرأسي فيها ح م ولكنه النصف قطر الاحتراق ام فتحت المماس يكون حينئذ عمود ا ط المحصور بين نقطة ا ونقطة ط التي يقطع فيها المماس هذا العمود ويعلم من ذلك ان تحت المماس يأخذ في المنحنيات القطبية موضعا يخالف ما يأخذه في المنحنيات غير القطبية وهذا واضح حيث ان تحت المماس في المنحنيات غير القطبية بعدد اعمالي محورا لآفاق بخلاف ما اذا كانت المنحنيات قطبية فانه يتغير في الموضع في كل نقطة من المنحنى لان محور الآفاق المذكور لا يوجد هناك

\* ١٨٣ \* نبحث الآن عن الكمية الحاصية تحت المماس في المنحنيات القطبية ولذلك نفرض ان ام و ام يكونان نصفي قطرين احتراقين (شكل ٨٢) ثم نرسم من نقطة م خط م ح عمودا على نصف القطر الاحتراقي ام ونرسم ا ط موازيا لهذا العمود فيحدث من تشابه مثلثي ا ط م و ح م م هذا التناسب

$$ح م : ح م :: ا م : ا ط$$

$$\frac{ح م \times ا م}{ح م} = ا ط$$

وبمرعاة كون ح م هو أحد اضلاع مثلث ح م م القائم الزاوية يصير مقدار ا ط هذا

$$ا ط = \frac{ح م \times ا م}{ح م - ح م}$$

وفي حالة التحديد والتأية يكون ام مساويا ام يعني ع وينطبق ح م على قوس م د ووتر ح م على قوس ح م ويصير ا ط تحت

المماس ولم يبق حقيقة الا البحث عن مقدارى م م و م في حالة التعديل  
فالاول ليس المتفاضل قوس المتخفى فيكون على موجب بند (١٨١)

$$\overline{ع' ع' + ع' ع'} = م م$$

والثاني وهو م م يبحث عنه بالكيفية الآتية وهو أن يقال حيث انه يحدث  
من قطاعى اسرر و ام هذا التناسب

$$اسرر : سرر :: ام : م م \text{ أو}$$

$$ا : سرر :: ع : م م$$

يكون م م = ع × سرر وهذه الكمية تؤول في حالة التعديل  
الى ع ع وقضع مقادير م م و م م هذه في مقدار اط بعلم  
أن يغير ام بكمية ع و ع م بكمية م م ونختصر فوجد

$$اط = \frac{ع' ع'}{ع} \text{ وهى كمية تحت المماس}$$

• ١٨٤ • ولتعيين تحت العمودى زاعى انه حيث كان عمودى ع م  
(شكل ٨١) عموديا على المماس فرأسى ام يكون وسطا متناسبا بين  
تحت المماس وتحت العمودى ومن أجل ذلك يوجد

$$اط : ام :: ام : تحت العمودى \text{ أو}$$

$$\frac{ع' ع'}{ع} : ع :: ع : تحت العمودى ومنه يستخرج$$

$$\frac{ع}{ع'} = \text{تحت العمودى}$$

وبالنظر الى الخط العمودى والخط المماس زاعى مثلثى م ا ع و م ا ط القائم  
الزاوية فيحدث لنا منهما

$$\overline{ع م' ا' + ع' ا' م} = م ط \text{ و } \overline{ع م' ا' + م' ا' ط} = ع م$$

ثم نضع فى هاتين المعادلتين مقادير م ا و ا ع و اط فيوجد

العمودى

\*(١٤٥)\*

$$\frac{\sqrt{1 + \frac{e^2}{f^2}}}{\frac{e}{f}} = \text{العمودي} \quad \text{والمماس} = \frac{e}{f} \quad \text{والمماس} = \frac{e}{f}$$

\* ١٨٥ ولايجاد المقدار الحسابي للقطاع في المنحنيات القطبية ننظر  
مثلث امّ م (شكل ٨٢) فيحدث منه

$$\text{مساحة امّ م} = \frac{2 \times 21}{2}$$

وفي النهاية تكون مساحة مثلث امّ م (شكل ٨٢) عبارة عن مساحة  
قطاع عنصري وعمود م م يتغير بقوس م الذي وجدناه يساوي  
ع و امّ يزول الى ع فنضع هذه المقادير في المعادلة السابقة فنجد

$$\text{مساحة القطاع العنصري} = \frac{e^2}{2}$$

ويمكن ايضا بيان القطاع العنصري بدلالة الاحداثيات المستقيمة لانه بوضع  
مقادير ع و و في المستخرجة من معادلات (١٠٢) و (١٠٥)  
في هذه المعادلة تصبح

$$\text{مساحة القطاع العنصري} = \frac{m^2 - n^2}{2} \quad \text{وهو المراد بيانه}$$

\*(في تعيين كمية نصف قطر الانحناء في منحن قطبي)\*

\* ١٨٦ \* قد بينا في بند (١٤٩) مقدار نصف قطر الانحناء بنسبة  
الاحداثيات المستقيمة ورفعنا الاشكال بلحوق هذا المقدار بإشارة  
تجعل ثن موجبا ولذلك وضعناه هكذا

$$\text{ثن} = \frac{\left(1 + \frac{v^2}{s^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{v}{s^2}} \dots \dots \dots (١٠٧)$$

فلعرفة مقدار ثن هذا بدلالة الاحداثيات القطبية لايلزم الا حذف  
المكثرات التفاضلية الداخلة في هذا المقدار بواسطة المعادلات الآتية وهي

$$m = e \text{ جتا } e \quad \text{و} \quad n = e \text{ حـ } e$$

\*(١٤٦)\*

ولذلك نأخذ تفاضل هذه المعادلات ثم نقسم النواتج الحادثة على بعضها  
فيحدث لنا

$$\frac{\text{واصه} + \text{ع حاء} + \text{ع جتاء}}{\text{واسر} - \text{ع حاء} - \text{ع جتاء}} = \frac{\text{واسر}}{\text{واسر}}$$

ونرمز لكميتي هذا الكسر برمزي م و د فيجد

$$(١٠٨) \dots \begin{cases} \text{واسر} + \text{ع حاء} + \text{ع جتاء} = \text{م} \\ \text{واسر} - \text{ع حاء} - \text{ع جتاء} = \text{د} \end{cases}$$

واذن يكون

$$\frac{\text{واسر}}{\text{واسر}} = \frac{\text{م}}{\text{د}} \dots \dots \dots (١٠٩) \text{ أو}$$

$$\frac{\text{واسر}^2}{\text{واسر}^2} = \frac{\text{م}^2}{\text{د}^2}$$

وبواسطة هذه المعادلة يوجد بخصوص بسط مقدار تق

$$\frac{\text{واسر}^2}{(\text{م}^2 + \text{د}^2)} = \frac{\text{واسر}^2}{\left( \frac{\text{واسر}^2}{\text{واسر}^2} + 1 \right)}$$

ثم نرفع كل كية من كيتي هذا الكسر الى قوة  $\frac{2}{3}$  والقوة  $\frac{2}{3}$  لكمية د هي د<sup>2/3</sup> فيجد

$$(١١٠) \dots \dots \dots \frac{\text{واسر}^2}{(\text{م}^2 + \text{د}^2)^{\frac{2}{3}}} = \frac{\text{واسر}^2}{\left( \frac{\text{واسر}^2}{\text{واسر}^2} + 1 \right)^{\frac{2}{3}}}$$

ونأخذ تفاضل معادلة (١٠٩) فيوجد

$$\frac{\text{واسر}^2 - \text{م}^2 - \text{د}^2}{\text{د}^2} = \frac{\text{واسر}^2}{\text{واسر}^2}$$

ثم نقسم الطرف الأول لهذه المعادلة على واسر والطرف الثاني على د  
المكافئة الى واسر فيجد

واسر

\*(١٤٧)\*

$$(١١١) \dots\dots\dots \frac{و^٢م - م^٢و}{و^٢} = \frac{و^٢م}{و^٢}$$

وبواسطة المقادير المعلومة بمعادلتى (١١٠) و (١١١) تؤول معادلة (١٠٧)

$$(١١٢) \dots\dots\dots \frac{و^٢(م + و)}{و^٢م - م^٢و} = \text{نق} \quad \text{الى}$$

ولم يبق حينئذ الا تحويل هذه المعادلة الى دالة المتغيرى  $و$  و  $ع$  ولذلك يعين اولاً مقدار  $و^٢ + م^٢$  باضافة مربعات معادلات (١٠٨) على بعضها واختصار الناتج بمساعدة معادلة  $ح^٢ = و^٢ + ع^٢$  فيوجد

$$(١١٣) \dots\dots\dots و^٢ + م^٢ = و^٢ع + ع^٢و$$

وبالنظر الى مقام معادلة (١١٢) نأخذ تفاضل معادلات (١٠٨) على التعاقب باعتبار  $و^٢$  كمية ثابتة ثم نضرب الناتج الاول فى  $و$  والثانى فى  $م$  فنجد

$$و^٢م = و^٢ع + ع^٢و + و^٢ع - ع^٢و$$

$$م^٢و = م^٢ع - م^٢و + م^٢ع - م^٢و$$

وحين نطرح المعادلة الثانية من الاولى يوجد

$$(١١٤) \left\{ \begin{array}{l} و^٢م - م^٢و = و^٢ع - ع^٢و \\ + و^٢ع + ع^٢و \\ - ع^٢و - م^٢و \end{array} \right\}$$

واذا ضربنا ثانية معادلتى (١٠٧) فى  $و$  و  $ع$  فى الاولى فى  $و$  وطرحناهما من بعضهما واختصرنا الناتج بواسطة معادلة  $ح^٢ = و^٢ + ع^٢$  فنجد

$$و^٢ح - م^٢و = و^٢ع - ع^٢و$$

وبعمل مشابه لهذا العمل يوجد

$$و^٢ح - م^٢و = م^٢و - ع^٢و$$

واذا وضعت هذه المقادير فى معادلة (١١٤) صارت تلك المعادلة

$$(١١٥) و^٢م - م^٢و = و^٢ع - ع^٢و + م^٢و - ع^٢و$$

\*(١٤٨)\*

وبواسطة المقادير التي تعينت يعني (١١٣) و (١١٥) تتغير معادلة (١١٢) بمعادلة

$$\text{نق} = \frac{(ع^{\frac{2}{3}} + ع^{\frac{2}{3}} + ع^{\frac{2}{3}})}{ع^{\frac{2}{3}} + ع^{\frac{2}{3}} + ع^{\frac{2}{3}}} \text{ وهي المطلوبة}$$

\*(في المخنيات العالية)\*

\* ١٨٧ \* تسمى بهذا الاسم المخنيات التي تحتوي معادلاتها على كيات عالية او مكررات تفاضلية وعلى العموم جميع المخنيات التي لا يمكن أن تبين معادلاتها بعدد محدود من الحدود الجبرية يقال لها مخنيات عالية ولتين الشهير من هذه المخنيات فنقول

\*(في حلزوني ارشميدس أو كوفون)\*

\* ١٨٨ \* إذا دار نصف قطر ا - (شكل ٣٧) حول مركز ا وكانت نقطة ا تتحرك على هذا المستقيم تحركاً مستقيماً بحيث تأتي في متناه وهو نقطة - عند تمام دورته بعد ان كانت في ابتداء التحرك في مركز ا رسمت تلك النقطة في هذا التحرك خطاً منحنيًا هو حلزوني ارشميدس وليكن ا - = نق و قوس - = ع و ا م = ع فيوجد من بعد التعريف السابق

$$\text{ام : ا} :: \text{قوس : ع} :: \text{حزب : ا} \text{ أو}$$

$$\text{ع : نق} :: \text{ع : ط} \text{ نق ومنه يستخرج}$$

$$\frac{ع}{ط} = ع$$

وهذا المنحني ليس له احداثيات مستقيمة على ما يشاهد فاذا دار ا - دورة تامة كافي قوس - المحيط ويكون حينئذ ع = ط نق ومن ثمة تتحول المعادلة السابقة الى

$$\frac{ط}{ط} = ع \text{ أو } ع = نق$$

واذا استمرت نقطة ا في تحركها على الاتساق رسم نصف قطر ا - دورة

\*(١٤٩)\*

دورة ثانية حول مركز  $a$  وإذا أخذ  $r = r_1$  كانت النقطة المتحركة واقعة في  $r$  في آخر هذه الدورة الثانية وتكون حينئذ  $r$  مساوية الى  $r_1$  وتلك تؤول معادلة

$$r = r_1 = r_2 \text{ الى } r = r_2 \text{ ولم يجر}$$

\*(في الحزوني اللوغاريتمى)\*

\* ١٨٩ \* الحزوني اللوغاريتمى هو منحن قطبي فيه زاوية  $am$  (شكل ٨١) الحادثة بين نصف قطر  $am$  الاحتراقي وبين خط  $mp$  المماس بالمختى ثابتة واذن يوجد بالرمز بحرف  $r$  لظل زاوية  $am$   $r = am$

وحيث انه يحدث من قيام مثلث  $mpa$  في  $a$  هذا التناسب

$$a : r = am : r :: am : r$$

$$r = am$$

وإذا غيرنا نصف القطر الاحتراقي  $am$  برمز  $r$  و  $am$  بكمية

$$\frac{r}{r_1} \text{ الموجودة في بند (١٨٣) لاجل تحت المماس لمنحن قطبي نجد}$$

$$r = r_1 \text{ أو } r = \frac{r}{r_1} \text{ الذى يستخرج منه}$$

$$\frac{r}{r_1} = r \dots\dots\dots (١١٦)$$

وبأخذ تكامل هذه المعادلة على ماسياتى يوجد

$$r = r_1 + \text{ثابتة}$$

ولكن هـ أساس الجلة اللوغاريتمية للمهندس نيبير فإذا نظرت  $r$  كلوغاريتم لقيمة هـ في جلة لوغاريتمية ما أمكن ابدال  $r$  بكمية لو هـ وتكون حينئذ كمية لو هـ لوجا  $r$  مينة لوجاريتم  $r$



\*(١٥١)\*

القطبية المبين في بند (١٨٦) بهذا الرمز

$$\frac{\frac{2}{3}(e' + e'')}{\frac{2}{3}(e' + e'') - e' + e''} = \text{نق}$$

مقادير  $e'$  و  $e''$  المستخرجة من معادلة الحزوني اللوغاريتمي عوضا عنها وذلك نستخرج من معادلة (١١٦)

$$\frac{e' + e''}{\frac{2}{3}} = e' \quad \text{و} \quad \frac{e' + e''}{\frac{2}{3}} = e''$$

ثم نضع هذه المقادير في مقدار نق فيوجد

$$\frac{\frac{2}{3}(e' + e'')}{\frac{2}{3}(e' + e'') - e' + e''} = \frac{\frac{2}{3}(e' + e'')}{e' + e''} = \text{نق}$$

وإذا وضعت في كمية الخط العمودي التي هي على ما في بند (١٨٤)

$$\frac{e' + e''}{\frac{2}{3}}$$

مقدار  $\frac{e' + e''}{\frac{2}{3}}$  حدث كذلك  $\frac{e' + e''}{\frac{2}{3}}$  ويعلم من ذلك ان الخط

العمودي يساوي في هذا المنحنى نصف قطر الانحناء وحيث ان نصف قطر الانحناء هذا يتجه على هذا الخط العمودي على ما في بند (١٥٥) ينتج من ذلك ان هذه الخطوط تنطبق على بعضها

\* ١٩٢ \* وبواسطة هذه الخاصية يثبت ان مفروض الحزوني

اللوغاريتمي هو حلزوني لوغاريتمي ايضا ولاجل ذلك نعتبر نقطة (شكل ٨٤) من الخط العمودي التي هي من نقط نصف قطر الانحناء ايضا اذ هي نهايته الحقيقية وتوجد لا محالة على المفروض ثم نرمز لابعاها القطبية برموز  $e'$  و  $e''$  فيسهل تعيين هذه الابعاد بدلالة ابعاد  $e'$  و  $e''$  والنقطة  $m$  من المنحنى لانه اذا فرضنا ان  $o$  يكون قوسا من الدائرة

المرسومة بنصف قطر مساو للواحد كانت آفاق قطبي م و د تختلف  
عن بعضها بهذا القوس وبسبب قيام زاوية م ا د يكون ذلك القوس مساويا  
الى ربع المحيط ولعدم الخلاف في المستعملات نبين برمز  $\frac{\pi}{4}$  ربع المحيط المرسوم  
بنصف قطر يساوى الواحد فتجد  $\epsilon = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$  وبأخذ تفاضل  
هذه المعادلة يوجد

$$\epsilon = \frac{\pi}{2}$$

وغير ذلك حيث ان بعد  $\epsilon'$  القطبي لنقطة د من المقروء يساوى

$$\text{تحت العمودى } \frac{\epsilon}{\epsilon'} \text{ للجزئى اللوغارىتمى تغير } \frac{\epsilon}{\epsilon'} \text{ بكمية } \epsilon'$$

في معادلة هذا المنحنى فتجد  $\epsilon = \epsilon'$  وعلى ذلك يكون  
 $\epsilon = \epsilon' = \frac{\pi}{2}$  فبوضع مقادير  $\epsilon$  و  $\epsilon'$  هذه في معادلة (١١٦)  
للجزئى اللوغارىتمى نجد

$$\epsilon = \frac{\epsilon'}{\epsilon}$$

وهذه المعادلة متحدة الشكل مع المعادلة السابقة فيها يفهم ان مفرودا  
الجزئى اللوغارىتمى هو جزئى آخر لوغارىتمى وهذا ما أردنا بيانه

\* (في الجزئى الزائدى والجزئيات الكامنة في معادلة  $\epsilon = \epsilon'$ ) \*

\* ١٩٣ \* الخاصية التى يتميز بها الجزئى الزائدى هى ثبوت أو عدم  
تغير تحت المماس فيه فاذا رمزنا تحت المماس هذا برمز  $\epsilon$  وساوينا  
بمقدار تحت المماس لمنحنى قطبي وهو المتبين فى بند (١٨٣) كانت معادلة  
هذا المنحنى يعنى الجزئى الزائدى هكذا

$$\epsilon' = \frac{\epsilon}{\epsilon} = 1$$

واخذت

\*(١٥٢)\*

وأخذت ثابتة \* بإشارة الناقص لانه يوجد عند ذلك

$$\frac{٤}{٦} = \frac{٤}{٦} -$$

التي هي معادلة يحدث منها من بعد أخذ تكاملها على ماسياتي

$$\frac{١}{٦} = \frac{٤}{٦} + \frac{١}{٦}$$

وتقول هـ - هذه المعادلة بتغيير كمية  $\frac{١}{٦}$  غير المتعينة بكمية اخرى  $\frac{١}{٦}$  غير متعينة الى

$$\frac{١}{٦} + \frac{٤}{٦} = \frac{١}{٦}$$

واذا أخذت النقطة الاصلية او الابتدائية للآفاق  $\frac{١}{٦}$  بحيث يكون أفق  $\frac{١}{٦} + \frac{١}{٦}$  مساويا الى أفق جديد  $\frac{١}{٦}$  الت المعادلة السابقة الى

$$\frac{١}{٦} = \frac{٤}{٦} \text{ أو هو الاول.}$$

$$\frac{١}{٦} = \frac{٤}{٦} \dots\dots\dots (١١٧)$$

وتبين هذه المعادلة انه يوجد  $\infty$  متى يكون  $\frac{١}{٦} = \frac{١}{٦}$  وينتج من ذلك ان نصف قطر الاحتراق الموافق الى النقطة التي يكون فيها  $\frac{١}{٦} = ٠$  هو خط مقربى للمحنى

\* ١٩٤ \* معادلة (١١٧) تبين ايضا ان نصف قطر الاحتراق يتناسب للافق عكسا واذا جعلنا  $\frac{١}{٦} = \frac{١}{٦}$  و  $\frac{١}{٦} = \frac{١}{٦}$  و  $\frac{١}{٦} = \frac{١}{٦}$  نجد بخصوص  $\frac{١}{٦}$  هذه المقادير المتوالية  $\frac{١}{٦}$  و  $\frac{١}{٦}$  و  $\frac{١}{٦}$  والخ و يعلم من ذلك ان نصف القطر الاحتراقي يؤول الى نصف ما كان في آخر الدورة الاولى عند تمام دورتين ويؤول الى ثلث ما كان عند تمام ثلاث دورات وهم جزا نظرا لعدة الدورات التي يدورها حول النقطة القطبية

\* ١٩٥ \* معادلة الحلزوني الزائدى هي ومعادلة حلزوني ارشميدس ليست الاحالات خصوصية من معادلة  $\frac{١}{٦} = \frac{١}{٦}$  لانه

يجعل  $\varnothing = ١$  و  $\varnothing = \frac{١}{٢}$  تحدث المعادلة الثانية ويجعل  $\varnothing = ١$  - تحدث الاولى ومن الخروزيات التي تبين بهذه المعادلة الخروزي المكافي وهو الموافق الى فرض  $\varnothing = ٢$

• (في اللوغاريتم) •

• ١٩٦ • اللوغاريتم نحن باحداثيات مستقيمة وفيه الاتفاق لوغاريتم (أسية واذن تكون معادلة هذا المنحنى بهذه الصورة

$$م = لوغا ص$$

$$ص = م = يوجود بواسطة التفاضل$$

$$\frac{فاص}{واس} = م = لوغا م$$

• ١٩٧ • للبحث عن بعض خواص هذا المنحنى نجعل  $م = ١$  فنجد  $ص = ١$  واذا أعطينا بعد ذلك مقادير متزايدة وموجبة الى متغير  $م$  أخذ متغير  $ص$  في الازدياد واذا أخذ متغير  $م$  مقداراً سالباً  $- ع$  يوجد  $ص = - ع = \frac{١}{ع}$  ويرى ان الرأس يتناقص كلما بعد عن النقطة الاصلية في جهة الآفاق السالبة وان المنحنى لا يقابل محور الآفاق الاعلى بعد غير محدود في الحالة التي تصير فيها معادلة  $ص = \frac{١}{ع}$  آيلة الى

$$ص = \frac{١}{\infty} = ٠$$

خط مقرب الى المنحنى

• ١٩٨ • اذا أخذنا من ابتداء النقطة الاصلية الآفاق المتساوية (شكل ٣٨)  $ع = ع$  و  $ع = ع$  يوجد  $ع = م$  و  $ع = م = \frac{١}{ع}$  واذن يكون  $ع \times ع = ١$

• ١٩٩ • الخاصية الشهيرة لهذا المنحنى هي ثبوت اعنى عدم

تغير تحت المماس فيه لانه يوجد بأخذ تفاضل معادلة اللوغاريتمى

$$\frac{y}{x} = \frac{y}{x} \text{ لو غا } x \text{ ويستخرج من ذلك}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{y}{x^2} \text{ أو}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{y}{x^2}$$

وحيث ان الطرف الاول لهذه المعادلة يبين تحت المماس للمنحنى كما فى بند (٦٩)

فهو ثابت لمساواته كمية  $\frac{1}{x}$  الثابتة وهو المراد بياته

• (فى السكلويد) •

• ٢٠٠ • السكلويد منحنى يرسم بنقطة م (شكل ٣٩)

الكائنة على محيط الدائرة المتدرجة على مستقيم  $xx'$  ومن المحقق ان

جميع نقط قوس  $mm'$  تنطبق على التعاقب على مستقيم  $xx'$  فنطبق

نقطة م فى قوسها على  $a$  فى هذا التحرك لا نأخذ من  $xx'$  ويكون

قوس  $mm'$  مساويا لمستقيم  $xx'$

وحيث كانت جميع النقاط التى تمر عليها م فى هذا التدرج توجد على

السكلويد فرضا فنقطة  $a$  تكون كذلك على هذا المنحنى فمأخذها مبدأ

للافاق او نقطة أصلية وتنزل عمود م ه على قطر  $xx'$  ونجعل

$ah = mm' = xx' = xx'$  وقوس م  $mm' = xx'$  وقوس م ه  $mh = xx'$  فيجد

$$ah = mm' - xx' = 0 \text{ أو}$$

$$mm' = xx' - mm' = 0 \text{ أو}$$

$mm' = xx' - mm' = 0 \text{ أو}$  (١١٨)

ونبحث أولا عن حذف قوس  $xx'$  بالكيفية الآتية وهى أن نأخذ تفاضل

المعادلة السابقة فيوجد

$$\text{واسه} = \text{وار} - \text{وا} \dots\dots\dots (١١٩)$$

ولايجاد مقدار وار بدلالة ع نراى انه يوجد جد بين ع و و  
هذا التعادل

$$\text{ع} = \text{جاز}$$

وبأخذ تفاضل هذه المعادلة على ما فى بند (٤٢) يوجد

$$\text{وا} = \text{واز} \frac{\text{جنا}}{\text{ع}} \text{ ومنه يستخرج}$$

$$\text{وار} = \frac{\text{عوا}}{\text{جنا}}$$

ويلزم تغيير مقدار جناز فى هذه المعادلة بالمقدار الذى يحدث من معادلة

$$\text{جار} + \text{جنا} = \text{جنا} \text{ أو وهو الاولى}$$

$$\text{ع} + \text{جنا} = \text{جنا}$$

ويحدث بذلك

$$\text{وار} = \frac{\text{عوا}}{\text{ع} - \text{جنا}}$$

وبوضع هذا المقدار فى معادلة (١١٩) يكون

$$\text{واسه} = \frac{\text{عوا}}{\text{ع} - \text{جنا}} - \text{وا} \dots\dots\dots (١٢٠)$$

ولم يبق الا بيان ع بدلالة صه ولاجل ذلك ففرض ان و يكون  
مركز الدائرة الراسمة - م - (شكل ٣٩) فنجد

$$\text{وه} = \text{م} - \text{م} \text{ أو}$$

$$\text{ع} - \text{صه} = \frac{\text{عوا}}{\text{ع} - \text{جنا}} \dots\dots\dots (١٢١)$$

وبتربيع هذه المعادلة واختصارها يستخرج منها

$$\text{ع} = \frac{\text{ع}^2 - \text{صه}^2}{\text{ع} - \text{جنا}} \dots\dots\dots (١٢٢)$$

وبأخذ

وباختار التفاضل يكون

$$(122) \dots \frac{(7-صه)واصه}{صه-صه} = ٤٦$$

نتم تحويل معادلة (١٢٠) بواسطة معادلتى (١٢١) و (١٢٣) الى

$$\frac{\frac{\text{دواصه}}{(7-\text{صه})\text{واصه}}}{\gamma\text{صه} - \gamma\text{صه}} - \frac{\text{دواصه}}{\gamma\text{صه} - \gamma\text{صه}} = \text{واصه}$$

و باختصار هذیه و حد

واسه =  $\frac{\text{معدله واسه}}{27 \text{ صه} - 2 \text{ صه}}$  وهي معادلة السكاويد

• ٢٠١ • ويمكن ايضا ان معادلة السكاويد بدلالة القوس

فالكيفية الآتية وهي ان تستخرج من معادلة  $E = mc^2$

ر = قوس (جا = ع)

ثم نضع في هذه المعادلة عوضاً عن ع مقدارها المستخرج من معادلة (١٢٢) فنجد

ر = قوس (جا =  $\gamma = 2\pi$  - صر)

وحين يوضع هذا المقدار ومقدار ع في معادلة (١١٨) يكون

سہ = قوم (جا) = (۲۷ ص - ۲۸ ص) - (۲۷ ص - ۲۸ ص) ۰۰ (۱۲۴)

والجيب هنا يبطأ إلى نصف قطر  $r$  وأما الجيب من الجدول الذي نصف

القطر فيه واحد فانه يكون  $\frac{2^2 - 2}{2}$

وإذا أردت إدخال هذا الجيب يجب وضع

$$m = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \cos(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

\* ٢٠٢ \* والبحث عن بعض خواص هذا المنحنى ثبت أولان صـ

لَا تَكُونُ سَالِبَةً وَلَا كَبْرًا ٥٢ لَآئِهَ إِذَا جَعَلَ صِهْ = صِهْ

تؤول كمية قوس (جا =  $\gamma$  ٢٢ صه - ص٢) الى قوس (جا =  $\gamma$  - ٢٢ صه - ص٢) وهي كمية تخيلية وثانيا اذا جعل صه = ٢٢ + ل آت كمية قوس (جا =  $\gamma$  ٢٢ صه - ص٢) الى قوس (جا =  $\gamma$  - ٢٢ ل - ل٢) وهو مقدار تخيلي ايضا فاذن يكون المنحنى محصورا بين متوازيين  $\gamma$  و  $\gamma - \gamma$  بمذا - (شكل ٤٠) موازيا الى  $\gamma$  على بعد هف = ٢٢ عن محور الاتاف

واكبر مقدار يكون لتغير صه هو ٢٢ لانه اذا دحرجت الدائرة الراسمة من ا نحو  $\gamma$  (شكل ٤١) أخذت نقطة م التي كانت اولاً في ا في الارتفاع على الولا الى ان تصير في - التي هي طرف قطر سد فيكونا عند ذلك اتفق اد مساويا الى دهـ يعني نصف محيط الدائرة الراسمة وهذا الناتج يطابق ما يحدث من معادلة (١٢٤) حيث انه يجعل صه = ٢٢ فيما يوجد صه = قوس (جا = ٠) والقوس الذي جيبه صفر هو واحد هذه القسي ٠ دهـ و ٢ دهـ و ٣ دهـ والخ ويرى ان القوس في هذه الحالة هو دهـ

ويملم من ذلك انه حين تأتى نقطة م في - تكون قدر سمت قوس اـ من السكويد فاذا استقرت هذه النقطة في تحركها سمت قوسا آخر  $\gamma$  مشابها للاول وبالجملة متى استقرت الدائرة الراسمة في تدحرجها على محور الاتاف حدثت نقطة م قسما من السكويد لا حصر لاعددها وهي  $\gamma - \gamma$  و  $\gamma - \gamma$  ..... الخ انظر (شكل ٤٢) ويمكن أن تتحرك الدائرة الراسمة في جهة ا نحو ا وتحدث نقطة م حينئذ اقواسا غير محصورة العدد اـ و اـ ..... الخ وجملة الاقواس الموجودة في الجهة المرادة هي المركبة للسكويد

\* ٢٠٣ \* الخط العمودى في النقطة التي ابعادها مه و صه (شكل ٤٣) متعين على ما في بند (٧٠) بهذا القانون

العمودى

$$\text{العمودى} = \text{صه} \sqrt{1 + \frac{\text{واصة}^2}{\text{واسه}^2}}$$

فإذا وضعنا في هذا القانون مقدار  $\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}}$  المستخرج من معادلة السكلويد

نجد

$$\overline{\text{العمودى}} = \text{صه} \sqrt{1 + \frac{\text{واسه}^2 - \text{واسه}^2}{\text{واسه}^2}} = \text{صه} \sqrt{1 + \frac{\text{واسه}^2}{\text{واسه}^2}}$$

ولاجل رسم هذا المقدار نوصل وتر م د (شكل ٤٣) فنجد

$$\text{ده} : \text{م د} :: \text{م د} : \text{و د} \text{ أو}$$

$$\text{صه} : \text{م د} :: \text{م د} : \text{و د} \text{ ومنها يحدث}$$

$$\text{وتر م د} = \overline{\text{واسه}}$$

وحيث ان زاوية م د ه قائمة من خاصية الدائرة فوتر م د يكون عمودا على الخط العمودى م د في طرفيه ويعلم من ذلك ان وتر م د الممدود يمر السكلويد في نقطة م لان الخط المماس والخط العمودى يشكلان بينهما زاوية قائمة ابدا

واذن يمكن امتداد الخط المماس للسكلويد في نقطة م برسم نصف الدائرة الراسمة م د و مدوتر م د ولعدم تشكيل هذه الدائرة الراسمة في كل نقطة من المنحنى يكفي رسم نصف الدائرة الراسمة على اكبر الراسيات وهو ن د (شكل ٤٤) ومد خط م ه من النقطة المفروضة م عمودا على م د ووصل وتر م د فخط م ط المرسوم من نقطة م موازيا لهذا الوتر يكون هو المماس المطلوب وذلك لم يكن النتيجة من السابق

• ٢٠٤ • لمعرفة مقدار نصف قطر الانحناء للسكلويد يلزم أن تستخرج

$$\text{مقادير } \frac{\text{واصة}}{\text{واسه}} \text{ و } \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}} \text{ من معادلة هذا المنحنى ثم توضع تلك المقادير}$$

في كية نصف قطر الانحناء التي هي

• (١٦٠) •

$$\text{نق} = \frac{\left( \frac{\text{واصة}}{\text{واسر}} + 1 \right)^{\frac{2}{2}}}{\frac{\text{واصة}}{\text{واسر}}} \text{ على مافي بند (١٥٠)}$$

الماخوذة بإشارة سالبة لانا نعلم ان هذا المنحنى يتغير نحو محور ال' فاف  
هذا ويحدث أولا من معادلة السكاويد

$$\frac{\text{واصة}}{\text{واسر}} = \frac{\sqrt{\text{واسر}^2 - \text{واصة}^2}}{\text{واسر}} \dots \dots \dots (١٢٥)$$

$$\text{ولايجاد } \frac{\text{واصة}}{\text{واسر}} \text{ نجعل } \frac{\text{واصة}}{\text{واسر}} = \epsilon \text{ فنجد ايضا}$$

$$\epsilon = \frac{\sqrt{\text{واسر}^2 - \text{واصة}^2}}{\text{واسر}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{\text{واصة}^2}{\text{واسر}^2}}}{1}$$

ويأخذ التفاضل على مافي بند (٢٣) يوجد

$$\frac{\text{واسر}}{\text{واسر}} = \frac{\frac{\text{واسر}^2}{\text{واسر}}}{1 - \frac{\text{واسر}^2}{\text{واسر}^2}} = \frac{\text{واسر}}{\text{واسر}^2 - \text{واسر}^2}$$

واذن يكون

$$\frac{\text{واسر}}{\text{واسر}} = \frac{\text{واسر}}{\text{واسر}^2 - \text{واسر}^2}$$

ثم نضرب هذه المعادلة في معادلة (١٢٥) فنجد على مافي بند (٢٤)

$$\frac{\text{واسر}}{\text{واسر}} = \frac{\text{واسر}}{\text{واسر}^2} \text{ أو } \frac{\text{واسر}}{\text{واسر}} = \frac{\text{واسر}}{\text{واسر}^2}$$

وبواسطة هذه المقادير تووّل كمية نصف قطر الانحناء الى

$$\text{نق} = \frac{\frac{\frac{1}{2} \frac{\text{واسر}}{\text{واسر}}}{\frac{1}{2} \frac{\text{واسر}}{\text{واسر}}}}{\frac{\frac{1}{2} \frac{\text{واسر}}{\text{واسر}}}{\frac{1}{2} \frac{\text{واسر}}{\text{واسر}}}} = \frac{\frac{1}{2} \frac{\text{واسر}}{\text{واسر}}}{\frac{1}{2} \frac{\text{واسر}}{\text{واسر}}} = \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{\text{واسر}}{\text{واسر}} \right)}{\frac{1}{2} \frac{\text{واسر}}{\text{واسر}}}$$

ويجمل

• (١٦١) •

ويجعل صه في البسط يكون

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} = \text{نق}$$

ويعلم من ذلك ان نصف قطر الانحناء مم (شكل ٤٥) للسكويده هو ضعف الخط العمودي مـ

• ٢٠٥ • وتستخرج معادلة المفرد بوضع مقادير

$$\frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}} \text{ و } \frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}} \text{ في قوانين بند (١٤٩) التي هي}$$

$$\frac{\frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}}}{\frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}}} + 1 = \frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}}$$

$$\frac{\frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}}}{\frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}}} = \frac{\left( \frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}} + 1 \right)}{\frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}}} = \frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}} - \frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}}$$

فيوجد

$$\frac{\frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}}}{\frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}}} = \frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}} - \frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}}} = \frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}} - \frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}}$$

واذن يكون

$$\frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}} = \frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}} + \frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}}$$

او (شكل ٤٦)

$$\frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}} = \frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}} + \frac{\text{قاصه}}{\text{قاسه}}$$

فا

\* (١٦٢) \*

وبمراعاة كون  $اح + مھ = ار = قوس م$  يمكن وضع  
المعادلة الأخيرة هكذا

$$ر = قوس م + مھ \dots\dots\dots (١٢٦)$$

وإذا مددنا  $سر$  وأخذنا  $رل = سر = ٢ر$  ورسمنا نصف  
محيط  $رمل$  على  $رل$  مَرَّ هذا النصف بمحيط بنقطة  $م$  بسبب تساوي  
وتري  $م$  و  $م$  و يوجد اذًا

قوس  $م$  = قوس  $م$  و  $مھ = مھ$   
فنضع هذه المقادير في معادلة (١٢٦) فيوجد

$$ر = قوس م + مھ \text{ واذن يكون}$$

$$ر = قوس م + مھ \dots\dots\dots (١٢٧)$$

وهذه هي المعادلة التي توجد بين ابعاد  $اك = ر$  و  $كم = و$   
لنقطة  $ما$  من المفرد فنقول الآن الرأسى  $د = ٢ر$  (شكل ٤٦)  
بكمية  $دا$  مساوية ايضا الى  $٢ر$  ونرسم من نقطة  $ا$  خط  $ا١$   
موازيا لخط  $اد$  ونحوّل النقطة الاصلية  $ا$  في  $ا١$  وليكن لاجل ذلك  
 $اك = ر$  و  $كم = د$  فنجد لاجل الاتق  $اك = اد - اك$  أو

$$ر = \frac{1}{2} \text{ المحيط الراسم } - اك \text{ أو}$$

$$ر = طه - ر$$

وبالنظر الى الرأسى  $د$  يوجد

$$مك = ا١ - كم \text{ أو}$$

$$د = ٢ر - و$$

ويمستخرج من هذه المعادلات

$$ر = طه - ر \text{ و } د = ٢ر - و$$

وبواسطة هذه المقادير نقول معادلة (١٢٧) الى

\*(١٦٣)\*

$$\begin{aligned} \text{ط} - \text{ر} &= \text{قوس م} + \sqrt{\text{و} - \text{و}'} \quad \text{أو} \\ \text{ط} - \text{ر} &= \text{قوس م} - \sqrt{\text{و} - \text{و}'} \\ &= \text{ط} - \text{قوس م} + \sqrt{\text{و} - \text{و}'} \end{aligned}$$

وعلى ذلك يكون

$$\text{ر} = \text{قوس م} - \sqrt{\text{و} - \text{و}'}$$

وهذه المعادلة هي معادلة سكلويد فيعلم من ذلك ان مفرد السكلويد سكلويد اخر  
 \* ٢٠٦ \* ويمكن الاثبات بالوجه الآتى على ان المفرد (ا)  
 (شكل ٤٦) سكلويد ولذلك نقول عندنا

$$\begin{aligned} \text{قوس ل} + \text{قوس م} &= \text{ط} \quad \text{فيكون} \\ \text{قوس ل} &= \text{ط} - \text{قوس م} \end{aligned}$$

وغير ذلك

$$\text{قوس م} = \text{قوس م} = \text{ا} \quad \text{كما في بند (١٩٩)}$$

فاذا وضعنا هذا المقدار في المعادلة السابقة حدث

$$\begin{aligned} \text{قوس ل} &= \text{ط} - \text{ا} = \text{ا} - \text{ا} \quad \text{أو} \\ \text{قوس ل} &= \text{ا} \end{aligned}$$

وهذه هي خاصية السكلويد

\*(في تغيير المتغير غير المعلق)\*

\* ٢٠٧ \* متى يفرض قانون مشتق على مكررات تفاضلية  
 فلا يمكن حذف تلك المكررات الا بمساعدة معادلة المنحنى الذى يراد تطبيق  
 هذا القانون عليه ومثاله ان يطلب ما يؤول اليه قانون

$$\frac{\left(1 + \frac{\text{واصة}}{\text{واصة}}\right)}{\frac{\text{واصة}}{\text{واصة}}}$$

مق يكون المنحى قطعاً مكافئاً فإنه يلزم أن يسـ تخرج من معادلة القطع المكافئ

التي هي  $صه = ع سه$  مقادير  $\frac{واصه}{واسه}$  و  $\frac{واصه}{واسه}$  ثم توضع هذه المقادير

في ذلك القانون لتحذف المكررات التفاضلية حينئذ وإذا نظرت كميات

$\frac{واصه}{واسه}$  و  $\frac{واصه}{واسه}$  كجهولة يلزم غالباً معادلتان لحذفها من أى

قانون كان وتدرج هاتان المعادلتان بأخذ تفاضل معادلة المنحى مرتين  
على التوالي

• ٢٠٨ • مق تزال  $واسه$  بواسطة العمليات الجبرية من أن تكون  
موجودة تحت  $واصه$  كما في القانون الآتي

$$\frac{صه(واسه + واسه)}{واسه + واسه - صه واسه} \dots\dots\dots (١٢٨)$$

قالواضع يفعل بنظر كميات  $واسه$  و  $واصه$  و  $واصه$  كجهولة  
وحيث أنه يلزم لحذفها على العموم معادلات عدتها كعدتها فلا يترأى أولاً أن  
الحذف يمكن حيث كان تفاضل معادلة المنحى لا يحدث إلا معادلتين بين  
 $واسه$  و  $واصه$  و  $واصه$  لكن يلزم التأمل أنه حين تحذف  $واصه$  و  $واصه$   
بواسطة هاتين المعادلتين يوجد في القانون مضروب مشترك  $واسه$  ينحذف  
ويستقطفاً إذا كان المنحى قطعاً مكافئاً معادلته  $صه = ع سه$  مثلاً فإنهم  
بأخذ تفاضل هذه المعادلة مرتين بالتوالى يوجد

$$واصه = ع سه واسه و واسه = ع سه واسه$$

وبوضع هذه المقادير في قانون (١٢٨) يوجد بعد اسقاط المضروب  
المشترك  $واسه$

$$\frac{صه(ع سه + ١)}{ع سه - ع سه}$$

\* ٢٠٩ \* ويمكن بسهولة ادراك السبب في صيران  $\frac{1}{\text{واسه}}$  مضروباً

مشتركا لانه متى يحذف مقام  $\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$  في القانون الذي كان محتوياً بقولا

على  $\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$  و  $\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$  تكتسب جميع الحدود ماعدا المحتوية

على  $\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$  و  $\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$  مضروباً مشتركا  $\frac{1}{\text{واسه}}$  وحينئذ

لا تحتوي الحدود التي كانت متبوعة بكمية  $\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$  على  $\frac{1}{\text{واسه}}$  بخلاف

الحدود التي كانت متبوعة بكمية  $\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$  فانها تحتوي على  $\frac{1}{\text{واسه}}$  برتبة

اولى لان حاصل ضرب  $\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$  في  $\frac{1}{\text{واسه}}$  يؤول الى  $\frac{1}{\text{واسه}}$

ومتى يؤخذ تفاضل معادلة المنحنى بعد ذلك وتحدث نواتج بهذه الصورة

$\frac{1}{\text{واسه}} = \text{م واسه}$  و  $\frac{1}{\text{واسه}} = \frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$  وتوضع هذه المقادير

في الحدود المحتوية على  $\frac{1}{\text{واسه}}$  و  $\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$  تتغير تلك الحدود كالحدود

الباقية بمحو اصل ضروب للكمية  $\frac{1}{\text{واسه}}$

\* ٢١٠ \* وما ذكرناه بخصوص القانون الذي يحتوي على التفاضلات

برتبة أولى وثانية يمكن تطبيقه على القوانين التي توجد فيها هذه التفاضلات

برتبة أعلى من ذلك وينبني عليه انه بأخذ تفاضل معادلة المنحنى مرارا على

قدر اللازم يمكن دائماً حذف التفاضلات المحتوية عليها القانون المقروض

\* ٢١١ \* ولا يكون كذلك اذا احتوى القانون المقروض حدوداً

فيها  $\frac{1}{\text{واسه}}$  و  $\frac{\text{واسه}}{\text{واسه}}$  والخ زيادة على التفاضلات التي اعتبرناها

لانه اذا فرضنا مثلاً انه يكون داخل في هذا القانون التفاضلات  
 $و^{\alpha} و^{\beta} و^{\gamma} و^{\delta}$  واخذنا تفاضل المعادلة  
 المتبينة برمز  $\delta = \delta$  مرتين على التوالي حدث منها هاتان المعادلتان  
 $\delta(و^{\alpha} و^{\beta} و^{\gamma} و^{\delta}) = \delta(و^{\alpha} و^{\beta} و^{\gamma} و^{\delta})$   
 ولا يمكن بهاتين المعادلتين الا حذف اثنين من التفاضلات  $و^{\alpha} و^{\beta} و^{\gamma} و^{\delta}$   
 و  $و^{\alpha} و^{\beta} و^{\gamma} و^{\delta}$  الثلاث ويشاهد عدم امكان حذف جميع التفاضلات الداخلة  
 في القانون المفروض ويوجد اذن في هذه الحالة شرط مقدر متعين  
 بالتفاضل  $و^{\alpha} و^{\beta} و^{\gamma} و^{\delta}$  وهذا الشرط هو أن متغير  $\delta$  معتبر بنفسه كدالة  
 لمتغير ثالث لا يظهر في القانون ويسمى بالمتغير غير المعاق وبصير ذلك في غاية  
 الوضوح اذ لو حظ كون معادلة  $\delta = \delta$  يمكن اشتقاقها  
 من جملة معادلاتي

$$\delta = \delta \quad و \quad \delta = \delta$$

اللازم حذف  $\delta$  من بينهما ولذا اتوول معادلة  $\delta = \delta$   
 الى جملة معادلاتي

$$\delta = \delta + \delta \quad و \quad \delta = \delta$$

وبذلك ان  $\delta$  و  $\delta$  يجب أن يتغيرا على مقتضى الزيادة التي يمن  
 ان تأخذها كمية  $\delta$  ولكن هذه الفرضية يعني كون  $\delta$  و  $\delta$   
 يتغيران من بعد الزيادة المفروضة للمتغير  $\delta$  تقتضي وقوع معادلات بين  
 $\delta$  و  $\delta$  وبين  $\delta$  و  $\delta$  واحدى هذه المعادلات تكون بالاختيار  
 لانه اذا فرض ان المعادلة التي نرمز لها على العموم برمز  $\delta = \delta$

$$\delta = \delta \quad \delta = \delta \quad \delta = \delta$$

$$\delta = \delta \quad \delta = \delta \quad \delta = \delta$$

$$\delta = \delta \quad \delta = \delta \quad \delta = \delta$$

ص =  $\frac{r_2 - r_4}{r_4 - r_2}$  التي اذا وقت مع  $r = \frac{r_2}{r_4}$  = ص  
 احدثت بواسطة الحذف ص =  $\frac{(r - r_4)}{r_4}$  وهو الشرط الواجب  
 مراعاته في انتخاب متغير ے

\* ۲۱۲ \* واذن يمكن تعيين متغير ے غیر المعلق  
 بالاختيار فيؤخذ له وتر أو قوس أو أفق أو رأسي مثلا فاذا بين ے  
 قوسا من المنحنى يجب أن يوجد  $و = \gamma و + و$  +  $و$  صر  
 واذا كانت ے تبين وتر او كانت النقطة الاصلية رأس المنحنى  
 يكون ے  $\gamma = و + و$  صر واخيرا يمكن ان تكون ے الافق  
 او الراسي ويوجد عند ذلك ے = و او ے = ص

\* ۲۱۳ \* قد يكون انتخاب أحد هذه الفروضات او غير هاضروريا  
 لاجل أن يكون القانون المشتمل على التفاضلات عاريا عنها اي عن هذه  
 التفاضلات والغالب انه اذا لم يفعل هذا الانتخاب يفرض تقديرا ان المتغير  
 غير المعلق كان متعينا ومثاله ان الفرضية في الحالة المعتادة التي لا يحتوى  
 القانون فيها الا على تفاضلات  $و = و + و + و + و$  ص و الخ  
 هي ان متغير ے غير المعلق كان مأخوذا لاجل الافق لانه ينتج من ذلك حينئذ

$$ے = و = و = ۱ و = \frac{و}{و} = \frac{و}{و} = \frac{و}{و} = الخ$$

ويرى ان القانون لا يشتمل على التفاضلات الثانية والثالثة و الخ  
 لكمية ے

\* ۲۱۴ \* ولتدبر القانون في عمومه يلزم من بعد ما سبق ان تكون  
 و و و دوال لمتغير ثالث غير معلق ے ويوجد على موجب بند (۲۴)

$$\frac{و}{و} = \frac{و}{و} = \frac{و}{و}$$

ويستخرج من هذه المعادلة

$$(١٢٩) \dots\dots\dots \frac{\frac{واصه}{وا} - \frac{واصه}{وا}}{\frac{وا}{وا}} = \frac{واصه}{وا}$$

ثم نأخذ التفاضل الثاني الى صه ونفعل بالطرف الثاني كما فعل بالكسور في بند (١٩) فيوجد

$$\frac{\frac{واصه}{وا} - \frac{واصه}{وا}}{\frac{وا}{وا}} = \frac{واصه}{وا}$$

ولمن وا في هذه الكمية استعمالان احدهما بيان ما يكون المتغير غير المعلق ے والاخر دخوله في الكمية المذكورة كعلامة جبر (والمراد بعلامة الجبر هنا كمية جبرية) ويمكن أن لا نعتبر وا ے الا بالمعنى الثاني مادامت ے هي المتغير غير المعلق هذا والكمية السابقة تختصر باسقاط المضروب المشترك وا ے بكتابتها هكذا

$$\frac{واصه - \frac{واصه}{وا}}{وا} = \frac{واصه}{وا}$$

واذا قسمنا على وا صارت

$$\frac{واصه - \frac{واصه}{وا}}{وا} = \frac{واصه}{وا}$$

\* ٢١٥ \* وبالعمل هكذا على معادلة (١٢٩) يرى انه باخذ ے متغيرا غير معلق يصير الطرف الثاني للمعادلة مطابقا للاول (ومعنى مطابق للاول عينه حذو ابجد) ويعلم من ذلك انه متى تؤخذ ے للمتغير غير المعلق لا يكون

• (١٦٩) •

لا يكون الانغير واحد ينبغي فعله في القانون المشتل على المـكـررات

التفاضلية  $\frac{واصة}{واسر}$  و  $\frac{واصة}{واسر}$  وذلك عبارة عن تبديل المكرر التفاضلي الثاني بهذا

$$\frac{واسر واصة - واصة واصة}{واسر}$$

والتطبيق هذه الاعتبارات على نصف قطر الانحناء الذي هو على ما في بند (١٨٦)

$$\frac{\frac{3}{2} \left( \frac{واصة}{واسر} + 1 \right)}{\frac{واصة}{واسر}} = \text{نق}$$

تقول انه لمعرفة مقدار نق في الحالة التي تكون فيها  $\frac{واسر}{واصة}$  مبينة للمتغير غير  
المعلق ينبغي تغيير هذه المعادلة بهذه

$$\frac{\frac{3}{2} \left( \frac{واصة}{واسر} + 1 \right)}{\frac{واسر واصة - واصة واصة}{واسر}} = \text{نق}$$

وبمراعاة كون البسط يؤول الى  $\frac{3}{2} \left( \frac{واسر + واصة}{واسر} \right)$  يوجد

$$\frac{\frac{3}{2} (واسر + واصة)}{واسر واصة - واصة واصة} = \text{نق} \dots\dots\dots (١٣٠)$$

• ٢١٦ • واذن يلزم مقدار نق هذا كون  $\frac{واسر}{واصة}$  و  $\frac{واسر}{واصة}$  تكون  
دوالا لمتغير ثالث غير معلق فاذا كان  $\frac{واسر}{واصة}$  هو هذا المتغير يعني  
اذا وجد  $\frac{واسر}{واصة} = \text{مه}$  كان  $\frac{واسر}{واصة} = ٠$  ويعود هذا القانون

$$\frac{\frac{2}{3} \left( \frac{v}{v'} + 1 \right)}{\frac{v}{v'}} = \frac{2}{3} \frac{(v + v')}{v} = \text{نق}$$

\* ٢١٧ \* ولكن اذا كان يراد أن يكون الرأى صه يبين المتغير غير المعلق عوضا عن أخذ صه لذلك المتغير تنظر أن هذا الشرط يكون متينا بمعادلة صه = ١ وباخذ تفاضل هذه المعادلة مرتين يوجد

$$\frac{v}{v'} = 1 \quad \frac{v}{v'} = 0$$

وتبين المعادلة الاولى من هاتين المعادلتين ان صه هو المتغير غير المعلق وهذا لا يغير القانون ولكن الثانية تبين ان  $\frac{v}{v'}$  يجب أن يكون صفرا وتؤول معادلة (١٣٠) حينئذ الى

$$\frac{2}{3} \frac{(v + v')}{v} = \text{نق}$$

\* ٢١٨ \* ولينبه انه متى تكون صه مينة للمتغير غير المعلق ووجد بناء على ذلك  $\frac{v}{v'} = 0$  استدل بهذه المعادلة على ان  $\frac{v}{v'}$  ثابتة وينتج من ذلك عموما أن تفاضل المتغير المنظور ومتغير غير معلق  $\frac{v}{v'}$  ثابتة

\* ٢١٩ \* واخيرا اذا أخذ القوس للدلالة على المتغير غير المعلق يوجد

$$\frac{v}{v'} = \frac{v}{v'} + \frac{v}{v'} \quad \frac{v}{v'} = 1$$

وإذا أخذنا تفاضل هذه المعادلة واعتبرنا  $\frac{1}{\omega}$  ثابتة على ما في بند (٤١٨) حيث كانت  $\omega$  هي المتغير غير المعلق وأجرينا العمل كما في قاعدة الالامس وجدنا

$$1 = \frac{\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}}{\frac{1}{\omega^2}} + \frac{\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}}{\frac{1}{\omega^2}}$$

ومنه يستخرج

$$\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}$$

وإذا وضعنا حينئذ مقدار  $\frac{1}{\omega^2}$  أو مقدار  $\frac{1}{\omega^2}$  المستخرج من هذه المعادلة في معادلة (١٣٠) يوجد في الحالة الأولى

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}}{\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}} = \frac{1}{\omega^2}$$

وفي الحالة الثانية

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}}{\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}} = \frac{1}{\omega^2}$$

\* ٢٢٠ \* لم نعتبر فيما سبق إلا المصـ  $\frac{1}{\omega^2}$  من التفاضلين

$\frac{1}{\omega^2}$  و  $\frac{1}{\omega^2}$  ولكن إذا كان القانون يحتوى على مكررات تفاضلية

برتب عليها نعين مقادير  $\frac{1}{\omega^2}$  و  $\frac{1}{\omega^2}$  ..... الخ

التي تتسبب للحالة التي يكون فيها  $\omega$  و  $\frac{1}{\omega^2}$  دوال لمتغير ثالث غير معلق بكيفيات مشابهة التي استعملت

• (في طريقة الصغيرات جدًا) •

\*(١٢٢)\*

\* ٢٢١ \* تعريف اللانهاى واعتباره يؤول الى تقرير هذه القضية  
وهى أن كل كمية قبلت الزيادة لا تكون غير منتهية او غير محدودة ولذا يجب  
اسقاط  $\infty$  من كمية  $\infty + \infty$  اذا اعتبرت  $\infty$  غير منتهية والا  
لقبت كمية  $\infty$  الزيادة ايضا وهذا يخالف تقريرنا

\* ٢٢٢ \* وحيث كانت هذه القضية هى الاساس لزم أن نثبتها  
بأبواب كاف فنقول  
لتكن معادلة

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = m \dots\dots\dots (١٣١)$$

فنضرب هذه المعادلة فى  $\infty$  يحدث

$$\infty + \infty = m \dots\dots\dots (١٣٢)$$

هذا واذا فرضنا ان  $\infty$  تصير غير منتهية وصل كسر  $\frac{1}{x}$  الى غاية درجة  
نقصانه فيؤول لامحالة الى صفر وتصبح معادلة (١٣١) حينئذ هكذا

$$\frac{1}{x} = m$$

واذا وضعنا هذا المقدار فى معادلة (١٣٢) حدث

$$\infty = \infty + \infty$$

وذلك يورى ان كمية  $\infty + \infty$  تؤول الى  $\infty$  متى تكون  $\infty$   
غير منتهية وهذا ما أردنا اثباته

\* ٢٢٣ \* كمية  $\infty$  التى تكون  $\infty$  بالنسبة اليها غير منتهية هى  
المسماة صغيرة جدا بالنسبة الى  $\infty$

\* ٢٢٤ \* حيث انا لانعتبر هنا الانسب الكميات فالاثبات السابق  
يقع ايضا متى يكون لكمية  $\infty$  مقدار منته بشرط ان مقدار  $\infty$  يكون  
مغيرا جدا بالنسبة الى كمية  $\infty$  وقضايا الكسور تجعل هذه الدعوة  
فى غاية الوضوح لانه اذا قارنا كمية  $\infty$  المتناهية بكسر  $\frac{1}{x}$  يتحقق انه كلما

زادت

• (١٧٣) •

زادت ع نقص الكسر واذن يصير هذا الكسر على الاطلاق صفرا  
مق تصير ع غير منتهية ولذا يسقط قطرا الى - التي تكون غير منتهية  
بالنظر الى ع

• ٢٢٥ • الكميتان الصغيرتان جدا لا تكون نسبتها صفرا  
لانه يوجد

$$\frac{\infty}{\infty} :: \frac{\infty}{\infty} :: -$$

وزيادة على ذلك يعرف ان الكميتين الصغيرتين جدا يمكن اعتبارهما كالكميتين

الكبيرتين جدا ولذا لا تكون النسبة  $\frac{\text{واحد}}{\text{واحد}}$  للكميتين الصغيرتين جدا

الرموز لهما رموز واحد واحد وواحد صفرا وهذا الناتج يطابق ما وجدناه  
باعتبار النهايات

• ٢٢٦ • متى تكون كمية ص صغيرة جدا بالنسبة الى مقدار منته  
ومنه فالربع ص يكون صغيرا جدا بالنسبة الى ص لانه يستدل بتناسب

$$١ : ص :: ص : ص$$

ان ص تدخل في ص مرارا عدتها كعدة دخول ص في الواحد  
يعنى عدد مرار غير منته

ويثبت كذلك بواسطة تناسب ص : ص :: ص : ص انه متى كان ص  
صغيرا جدا بالنسبة الى ص كان ايضا حد ص صغيرا جدا بالنسبة الى ص  
ولذلك انقسمت الصغيرات جدا الى درجات او مراتب مختلفة فكمية ص  
في الامثلة السابقة هي صغير جدا بدرجة اولى و ص صغير جدا  
بدرجة ثانية و ص صغير جدا بدرجة ثالثة وهكذا

• ٢٢٧ • وليأتمل انه متى كانت ص صغيرة جدا  
بالنسبة الى ص فكان كذلك ص مضروبة في كمية محدودة  
ص وثبات ذلك أن تقول حيث ان كمية ص يمكن اعتبارها

كسرامقامه يكون غير محدود قدر من لها بهذا الرمز  $\infty$  ومعلوم ان  $\frac{\infty}{\infty}$  او  $\frac{\infty}{\infty}$  شيا واحدا وهذه الكميات ليست الاعدا بالنسبة الى  $\infty$   
 \* ٢٢٨ \* الصغير جدا بدرجة اولى يسقط متى يكون جانب كمية محدودة لانها لا تزداد به وكذا يسقط الصغير جدا بدرجة ثانية الذي يكون في جانب صغير جدا بدرجة أولى وهلم جرا مثلا اذا كانت هذه الكمية

$$\infty + \infty + \infty + \infty + \infty$$

وكان فيها  $\infty$  صغيرا جدا بدرجة أولى كان  $\infty$  صغيرا جدا بدرجة ثانية و  $\infty$  صغيرا جدا بدرجة ثالثة ويجب حينئذ اسقاط  $\infty$  لان  $\infty$  لا يمكن أن يزداد  $\infty$  وحيث ان  $\infty$  لا يزيد  $\infty$  فيذف ايضا وبالجملة يذف  $\infty$  كذلك حيث ان هذا الصغير جدا الذي هو بدرجة أولى لا يمكن أن تزداد به كمية  $\infty$  المحدودة واذن يبقى  $\infty$  فقط

\* ٢٢٩ \* الكميتان الصغيرتان جدا  $\infty$  و  $\infty$  حاصل ضربهما يكون صغيرا جدا بدرجة ثانية لانه يحدث من حاصل ضرب  $\infty \times \infty$  هذا التناسب  
 $1 : \infty :: \infty : \infty$

وبه يستدل انه حيث كان  $\infty$  صغيرا جدا بالنسبة الى ١ فحاصل الضرب  $\infty \times \infty$  يكون صغيرا جدا بالنسبة الى  $\infty$  واذن يكون صغيرا جدا بدرجة ثانية

\* ٢٣٠ \* ويثبت ايضا ان حاصل ضرب الثلاث صغيرات جدا بدرجة أولى بين صغيرا جدا بدرجة ثالثة

\* ٢٣١ \* يمكن الآن شرح نظر التفاضل من بعد طريقة الصغيرات جدا ولاجل ذلك نفرض ان متغير  $\infty$  ياخذ في دالة تما زيادة صغيرة جدا تبين برمز  $\omega$  بحيث تتغير  $\infty$  بكمية  $\infty + \omega$  والفرق بين

الناتج



وحيث انه يجب اسقاط الصغريات جدا بدرجات عالية فلا يحفظ الاحتمال الذي يكون هو التفاضل المطلوب

• ٢٣٥ • ولايجاد تفاضل حاصل ضرب متغيرين  $صه و ع$  يفرضان  $صه نصير صه + واه و ع نصير ع + واه$  متى تتغير  $صه$  بكمية  $سه + واه$  فحاصل الضرب  $صه ع$  يصير حينئذ محولا الى  $(صه + واه)(ع + واه)$  وبجمله وطرح  $صه ع$  منه يبقى  $صه واه + ع واه + واه واه$  وحيث ان الحد الاخير لهذا الناتج صغير جدا بدرجة ثانية فيسقط ويوجد لتفاضل  $صه ع$  كمية  $صه واه + ع واه$

• ٢٣٦ • ويستخرج من بعد ذلك تفاضل حاصل ضرب بجمله مضارب وبعده تفاضل  $سه$  بالـ كيفيات التي اتبعناها حين استعمالنا طريقة النهايات

• ٢٣٧ • تفاضل كمية  $سه$  يستخرج ايضا بسهولة متى نحل

كمية  $سه + واه$  وهذا الحل ينال لكل كمية  $سه + هـ$  من بعد بند (٢٦)

ثم يبحث عن مقدار  $سه + واه$  ولا يحفظ منه الاحتمال

الاول وتسقط الحدود الباقية حيث انها صغيرات جدا بدرجات واطية عن درجة الحد المحفوظ ويستخرج من بعد هذا تفاضل لوغا  $سه$  كما بين

• ٢٣٨ • وبالنظر لتفاضل  $جاسه$  يوجد

$خا(سه + واه) - حاسه = حاسه جتا واه + جاه سه جتا سه - حاسه$  وبسبب كون قوس  $وايه$  صغيرا جدا يكون

$جتا واه = ا و جاه سه = واه سه$

ويوجد بواسطة هذه المصادر

$وايه جاسه = واه جتا سه$

• ٢٣٩ • لما كانت ثمة مسألة المماسات ومزيتها لا تتكرر

في حساب تفاضل التزمت أن أثبتنا بطريقة الصغيرات جدًا فاقول ليكن  
 ح م و ح م (شكل ٤٧) رأسيان متقاربان جدًا و هو خطأ  
 موازيا لمحور الآفاق فمماس م ط يمكن اعتباره كامتداد عنصر م م  
 من المنحنى لانه حيث كان هذا العنصر صغيرا جدًا يمكن نظره مستقيما  
 فلذا رمزنا لبعده ح بحرف س. و لبعده م ح بحرف ص. صارت  
 زيادة س التي هي ح ح عبارة عن و و زيادة ص تكون  
 م و = و و مثلث م م و الصغير جدًا يحدث منه لنا شبهة مثلث م ح ط

$$\begin{array}{l} \text{م و} :: \text{م ح} :: \text{ح ط} \quad \text{أو} \\ \text{و ص} :: \text{و س} :: \text{ح ط} \quad \text{ومنه يكون} \end{array}$$

$$\text{ح ط} = \text{ص} \frac{\text{و س}}{\text{و ص}}$$

ثم يوجد العمودي والمماس ومعادلات هذه الخطوط كما في بندى  
 (٧٠) و (٧١)

• ٢٤٠ • ولعرفة تفاضل قوس يعتبر القوس المحصور بين الرأسين  
 ح م و ح م القريبين من بعضهما جدًا كخط مستقيم فن ثمة يحدث من  
 مثلث م م و القائم الزاوية

$$\text{م م} = \text{م و} + \text{م و}$$

وبالمرز برمز قو للقوس الكلى يكون م م مينا برمز و قو ونؤول  
 المعادلة السابقة الى

$$\text{و قو} = \text{و س} + \text{و ص}$$

وباخذ الجذر التربيعى للطرفين يوجد

$$\text{و قو} = \sqrt{\text{و س} + \text{و ص}}$$

\* ٢٤١ تفاضل القوس من منحني ذي احدائيات قطبية يوجد ايضا بغاية السهولة باعتبار الصغيرات جدًّا ولذلك نفرض (شكل ٨٢) ان  $\text{س ر}$  و  $\text{م د}$  يكونان قوسين أحدهما وهو الاول من الدائرة المرسومة بنصف قطريساوي الواحد وثانيهما من الدائرة المرسومة بنصف قطريساوي  $\text{ع}$  ويكونان محصورين في الزاوية الصغيرة جدًّا  $\text{م ا م}$  المشكلة من نصفي قطرين احترافين فثلث  $\text{د م م}$  يمكن قطره كثلث مستقيم قائم زاوية  $\text{د}$  ويوجد حيثئذ

$$\overline{\text{م د}} = \overline{\text{م د}} + \overline{\text{د م}}$$

وبمراعاة كون  $\text{م د} = \text{ع ا}$  و  $\text{م د}$  يساوي  $\text{ع ا}$  على

مقتضى تناسب  $١ : \text{ع ا} :: \text{ع د} : \text{م د}$   
يمكن أن نبدل  $\text{د م و م د}$  بمقاديرها ونضع  $\text{ا ق و ق ا}$  محل  $\text{م م}$  فنجد

$$\overline{\text{ا ق و}} = \overline{\text{ا ق}} + \overline{\text{ق ا}}$$

وبمقارنة مثلث  $\text{م م د}$  المذكور بمثلث  $\text{م ا ط}$  يحدث لنا تحت الظل للمخفي القطبي بواسطة تناسب

$$\text{م د} : \text{م د} :: \text{ا م} : \text{ا ط}$$

واذا غيرنا  $\text{ا م}$  في هذا التناسب بنقط  $\text{ا م}$  الذي لا يختلف عنه الا بالصغير جدا حدث

$$\text{ع ا} : \text{ع ا} :: \text{ع ا} : \text{ا ط} \text{ ومنه يستخرج}$$

$$\text{ا ط} = \frac{\text{ع ا}}{\text{ع ا}}$$

طريقة لاجرائج لاثبات اصول حساب التفاضل من غير اعتبار النهايات والصغيرات جدًّا او كل كمية يجري حذفها

• ٢٤٢ • لما كانت قضية تباور كثيرة الفوائد والمنافع خصوصا عند ارادة حل الدوال الى متسلسلات لاح للمعلم لاجرايج كون اصول حساب التفاضل تنحصر في هذه القضية او تحدث منها ومن ثم اثبتنا من غير استعمال حساب التفاضل بالطريقة الآتية وهي هذه

$$\text{لتكن صه} = \text{د}(\text{سه} + \text{هه})$$

فهذه الدالة تؤول بالطبع الى دسه متى يجعل فيها هه = ٠ ويكون لذلك وقعا متى كان الجزء المحتوى على هه في هذه المعادلة مكررا لكمية هه ولتيسره برمز حه فن ثم يكون

$$\text{د}(\text{سه} + \text{هه}) = \text{دسه} + \text{حه}$$

و ح يمكن أن تكون دالة لكمية هه فاذا رمزنا برمز حه لما تؤول اليه ح حين يفرض فيها هه = ٠ وكان كه هو الجزء الذى يتعلق او يرتبط بكمية هه نجد ايضا حه = حه + كه وبمداومة هذا التبيان توجد هذه المعادلات المتوالية

$$\text{صه} = \text{دسه} + \text{حه}$$

$$\text{ح} = \text{كه} + \text{ح}$$

$$\text{ك} = \text{كه} + \text{ك}$$

$$\text{الخ} \quad \text{الخ} \quad \text{الخ}$$

وبوضع مقدار حه المعلوم بالمعادلة الثانية في المعادلة الاولى يحدث

$$\text{صه} = \text{دسه} + \text{حه} + \text{كه} + \text{هه}$$

ثم يوجد بوضع مقدار كه المعلوم بالمعادلة الثالثة في هذا الناتج

$$\text{صه} = \text{دسه} + \text{حه} + \text{كه} + \text{هه} + \text{كه} + \text{هه}$$

وبالمداومة هكذا ووضع د(سه + هه) محل صه يوجد عموما

د (س + ه) = د س + ه + ك<sup>١</sup> ه<sup>١</sup> + ك<sup>٢</sup> ه<sup>٢</sup> + ك<sup>٣</sup> ه<sup>٣</sup> + ٠٠ الخ (١٣٣)

\* ٢٤٣ \* وكية د (س + ه) تبين على العموم الدالة التي لم تزل غير محولة الى متسلسلة فاذا غيرت في هذه الدالة س بكمية س + ع حدث ناتج كالموغيرت ه بكمية ه + ع لان هذه الدالة لا يمكن أن تحتوى على متغير س من غير أن يكون هذا المتغير متبوعاً بكمية ه بلا واسطة فالحد الذي كحد ل (س + ه) <sup>١</sup> مثلاً يصير ل (س + ع + ه) <sup>١</sup> متى تتغير س بكمية س + ع ولاشك ان هذا الناتج ككمية ل (س + ه + ع) <sup>١</sup> التي تنتج من وضع ه + ع محل ه في دالة ل (س + ه) <sup>١</sup> وما ذكر في شأن هذا الحد يطبق على ما بقى من الحدود ويتضح من ذلك أن الطرف الاول لمعادلة (١٣٣) يحدث نواتج متطابقة في الحالتين وينبى عليه انه ينتج من حل د س + ه + ك<sup>١</sup> ه<sup>١</sup> + ٠٠ الخ نواتج متحدة بوضع س + ع محل س أو بوضع ه + ع محل ه

\* ٢٤٤ \* فبوضع ه + ع اولاً محل ه في حل

د س + ه + ك<sup>١</sup> ه<sup>١</sup> + ٠٠٠٠ الخ يوجد

د س + ه + ك<sup>١</sup> (ه + ع) + ك<sup>٢</sup> (ه + ع) + ك<sup>٣</sup> (ه + ع) + ٠٠ الخ (١٣٤)

وبكتابة الحدين الاولين فقط من كل من هذه الكميات ذات الحدين يحدث

د س + ه + ك<sup>١</sup> ه<sup>١</sup> + ك<sup>٢</sup> ه<sup>٢</sup> + ك<sup>٣</sup> ه<sup>٣</sup> + ٠٠ الخ (١٣٥)

ثم لايجاد الناتج من وضع س + ع محل س في كية د س + ه + ك<sup>١</sup> ه<sup>١</sup> + ك<sup>٢</sup> ه<sup>٢</sup> + ٠٠ الخ نراعى ان الزيادة ه موجودة لا محالة في هذه المتسلسلة ولا تدخل في د س ولا في المـكـتـرات ك<sup>١</sup> ه<sup>١</sup> ك<sup>٢</sup> ه<sup>٢</sup> الخ التي هي كميات لا يمكن أن تحتوى الا على س ولذلك يمكن اعتبارها دوال لهذا المتغير أعنى س وحيث كانت معادلة (١٣٣) تقع لاي دالة للمتغير س فوضع س + ع فيها محل س يغير

دسه بكمية دسه + ع<sup>١</sup> + ك<sup>١</sup> + ح<sup>١</sup> + ز<sup>١</sup> + الخ  
 و ع<sup>٢</sup> بكمية ع<sup>١</sup> + ع<sup>٢</sup> + ح<sup>٢</sup> + ح<sup>١</sup> + ع<sup>١</sup> + ز<sup>١</sup> + الخ  
 و ك<sup>١</sup> بكمية ك<sup>١</sup> + ك<sup>٢</sup> + ح<sup>٢</sup> + ح<sup>١</sup> + ك<sup>١</sup> + ز<sup>١</sup> + الخ  
 و ح<sup>١</sup> بكمية ح<sup>١</sup> + ح<sup>٢</sup> + ح<sup>٢</sup> + ح<sup>١</sup> + ح<sup>١</sup> + ز<sup>١</sup> + الخ  
 و ز<sup>١</sup> بكمية ز<sup>١</sup> + ز<sup>٢</sup> + ز<sup>٢</sup> + ز<sup>١</sup> + ز<sup>١</sup> + ز<sup>١</sup> + الخ  
 الخ الخ الخ الخ الخ الخ  
 واذا وضنا مقادير دسه و ع<sup>١</sup> و ك<sup>١</sup> و ح<sup>١</sup> و ز<sup>١</sup> الخ هذه في

متسلسلة دسه + ع<sup>١</sup> + ك<sup>١</sup> + ح<sup>١</sup> + ز<sup>١</sup> + الخ يوجد

دسه + ع<sup>١</sup> + ك<sup>١</sup> + ح<sup>١</sup> + ز<sup>١</sup> + الخ + (ع<sup>١</sup> + ع<sup>٢</sup> + ع<sup>١</sup> + ع<sup>١</sup>) + الخ

+ (ك<sup>١</sup> + ك<sup>٢</sup> + ك<sup>١</sup> + ك<sup>١</sup>) + الخ + (ح<sup>١</sup> + ح<sup>٢</sup> + ح<sup>١</sup> + ح<sup>١</sup>) + الخ + (ز<sup>١</sup> + ز<sup>٢</sup> + ز<sup>١</sup> + ز<sup>١</sup>) + الخ (١٣٦)

• ٢٤٥ • وينبغي أن يكون هذا الحل مطابقا للحل المبين برمز

(١٣٥) على ما في بند (٢٤٣) فليزوم أن تكون الحدود المتسلسلة على هـ

بقوى متحدة في هذين الحلين متساوية (انظر الملاحظة الثانية) واذن يوجد

بمطابقة الحدود المتبوعة بكميات هـ و هـ<sup>٢</sup> و هـ<sup>٣</sup> الخ  
 في هذين الحلين

$$ع^٢ = ك^٢ و ك^٢ = ح^٢ و ح^٢ = ز^٢ و الخ (١٣٧)$$

• ٢٤٦ • قد رأينا في بند (٢٤٤) ان ع<sup>٢</sup> هي على العموم دالة

لتغير دسه ومن اجل ذلك نرمز لها برمز دسه و نرمز برمز دسه للعدد

الذي يضرب في المكرر هـ في حل د<sup>٢</sup> (دسه + هـ) و برمز دسه للعدد الذي

يضرب في المكرر هـ في حل د<sup>٢</sup> (دسه + هـ) وهم جزأين هذه المعادلات

•(185)•

(١٣٨) 
$$\left. \begin{array}{l} \text{الخ} \\ \text{الخ} \\ \text{الخ} \\ \text{الخ} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{د}^{\text{س}} + \text{ه}^{\text{د}} + \text{الحدود المحتوية على ه}^{\text{د}} \text{ و ه}^{\text{س}} \\ \text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{د}^{\text{س}} + \text{ه}^{\text{د}} + \text{الحدود المحتوية على ه}^{\text{د}} \text{ و ه}^{\text{س}} \\ \text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{د}^{\text{س}} + \text{ه}^{\text{د}} + \text{الحدود المحتوية على ه}^{\text{د}} \text{ و ه}^{\text{س}} \\ \text{الخ} \end{array}$$

• ۲۴۷ • وحيث كان  $\varepsilon = 0$  دسمه بالفرض بند (۲۴۶)

فإذا جعلنا في هذه المعادلة  $m = m + h$  هو حدث

$$(1+q) \dots (1+q^{n-1}) = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$$

وبوضع مقدار (٢٠٠٠ هـ) العلوم شائعة معادلات (١٣٨) في هذه

## المعادلة يوجد

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = d \text{ مسموحه } + d \text{ مسموحه } + \text{الحدود المحتوية على } x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

وحيث ان هذه المعادلة لاتزال حقيقية مهما كانت كمية  $h$  يلزم ان تكون

الحدود المطابقة لقوى واحدة لحرف ه متساوية واذن يوجد

$$z' = z_1$$

ومقدار  $\gamma_1$  هذا يغير الاولى من معادلات (١٣٧) الى  $\gamma_2 = \gamma_1$

الذي يستخرج منه

$$\frac{1}{2} \text{ دونه} = 9$$

وإذا غيرنا في هذه المعادلة  $m$  بكمية  $m + h$  حدث

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n} \quad (r = r_1 + r_2 + \dots + r_n)$$

ثم نضع محل  $(س + هـ)$  حلها العلوم بثلاثة أعداد (١٣٨) فبعد

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \dots + \frac{1}{r_n} \quad \text{الحدود المحتوية على } r \text{ والخ}$$

ونطبق الحدود المضروبة في القوة الاولى لكمية ه فجد  $k' = \frac{1}{2} D_m$

و بوضع هذا القدر في ثانية معادلات (١٣٧) يوجد  $\frac{1}{2}$  دمه = ٢٣

الذي يستخرج منه



طلب مثلاً حقيقة  $\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}}$  في الدالة  $\text{سه} \text{سه} \text{سه}$  تحال  $(\text{سه} + \text{ه})$  بقانون الكمية ذات

الحدين فيوجد  $\text{سه} + \text{م سه}^1 + \text{الخ وحيث ان} \frac{\text{واصة}}{\text{واسه}}$  يجب أن يكون

مبيناً مكرر القوة الأولى لكمية  $\text{ه}$  في هذا الحل يوجد  $\frac{\text{واصة}}{\text{واسه}} = \text{م سه}^1$

ومن ثم يؤول الامر الى امكان ايجاد حل الدوال المتنوعة الممكن بيانها بالجبر بواسطة الطرق الحسابية وهذه الطرق لا تختلف عن الطرق التي شرحناها لحل الدوال على اختلافها والتي ينتج منها ما بقي تبعة ما يعضها وبذلك بينا حلول

$\text{سه} + \text{ه}^7$  و لوغا  $(\text{سه} + \text{ه})$  و جتا  $(\text{سه} + \text{ه})$  والخ

• ٢٥٠ • ومن ثم صارت هذه الطريقة طريقة ثالثة من بعدهما توجد اصول حساب التفاضل مبينة بوجه غير متعلق باعتبار النهايات والصغيرات جداً وكل كمية بحكم بحذفها ومع ذلك كله فلا غنى لهذه الطريقة عن طريقة النهايات لانه متى يجري تطبيقها ويراد مثلاً تعيين الاجسام او السطوح وتعديل المنحنيات او ايجاد كميات تحت المماس ونحت العمودي الخ يستلزم الدخول في النهايات أو الصغيرات جداً

• ٢٥١ • لا اعتبار لحلول الدوال المتنوعة  $(\text{سه} + \text{ه})$  أو  $\text{سه} + \text{ه}$

و لوغا  $(\text{سه} + \text{ه})$  و جا  $(\text{سه} + \text{ه})$  و الخ التي تعلم من علم الجبر يقال حيث ان هذه الدوال محدودة العدد يسهل معرفة كون مكرر القوة الأولى لكمية  $\text{ه}$  في حلها لا يكون صفراً ولا غير منته مادام الى  $\text{سه}$  مقدارها غير المعين وذلك ينتج من الاثبات السابق لانه اذا فرضنا  $\text{ه} = ٠$  في معادلة

$$\text{د}(\text{سه} + \text{ه}) = \text{د سه} + \text{ه} + \text{ه}^2 + \text{ه}^3 + \text{ه}^4 + \text{ه}^5 + \text{ه}^6 + \text{ه}^7 + \text{ه}^8 + \text{ه}^9 + \text{ه}^{10} + \text{ه}^{11} + \text{ه}^{12} + \text{ه}^{13} + \text{ه}^{14} + \text{ه}^{15} + \text{ه}^{16} + \text{ه}^{17} + \text{ه}^{18} + \text{ه}^{19} + \text{ه}^{20} + \text{ه}^{21} + \text{ه}^{22} + \text{ه}^{23} + \text{ه}^{24} + \text{ه}^{25} + \text{ه}^{26} + \text{ه}^{27} + \text{ه}^{28} + \text{ه}^{29} + \text{ه}^{30} + \text{ه}^{31} + \text{ه}^{32} + \text{ه}^{33} + \text{ه}^{34} + \text{ه}^{35} + \text{ه}^{36} + \text{ه}^{37} + \text{ه}^{38} + \text{ه}^{39} + \text{ه}^{40} + \text{ه}^{41} + \text{ه}^{42} + \text{ه}^{43} + \text{ه}^{44} + \text{ه}^{45} + \text{ه}^{46} + \text{ه}^{47} + \text{ه}^{48} + \text{ه}^{49} + \text{ه}^{50} + \text{ه}^{51} + \text{ه}^{52} + \text{ه}^{53} + \text{ه}^{54} + \text{ه}^{55} + \text{ه}^{56} + \text{ه}^{57} + \text{ه}^{58} + \text{ه}^{59} + \text{ه}^{60} + \text{ه}^{61} + \text{ه}^{62} + \text{ه}^{63} + \text{ه}^{64} + \text{ه}^{65} + \text{ه}^{66} + \text{ه}^{67} + \text{ه}^{68} + \text{ه}^{69} + \text{ه}^{70} + \text{ه}^{71} + \text{ه}^{72} + \text{ه}^{73} + \text{ه}^{74} + \text{ه}^{75} + \text{ه}^{76} + \text{ه}^{77} + \text{ه}^{78} + \text{ه}^{79} + \text{ه}^{80} + \text{ه}^{81} + \text{ه}^{82} + \text{ه}^{83} + \text{ه}^{84} + \text{ه}^{85} + \text{ه}^{86} + \text{ه}^{87} + \text{ه}^{88} + \text{ه}^{89} + \text{ه}^{90} + \text{ه}^{91} + \text{ه}^{92} + \text{ه}^{93} + \text{ه}^{94} + \text{ه}^{95} + \text{ه}^{96} + \text{ه}^{97} + \text{ه}^{98} + \text{ه}^{99} + \text{ه}^{100}$$

تقع حالتان وهما اما أن يعلم مقدار  $\text{سه}$  الداخل في  $\text{ه}$  بمعادلة

متطابقة



تكون الدالة المذكورة متطابقة أو ثابتة لأنه يعرف أنه إذا كانت دسمة  
بهذه الصورة  $س٢ - س١$  مثلاً أو كانت على صورة  $ث + س١ - س٢$  فإن وضع  
الدالة تكون في الحالة الأولى متطابقة وتؤول في الثانية الى كمية ثابتة  $ث$   
وينبني على هذا وذلك أن مكرر القوة الأولى للكمية  $هـ$  لا يمكن أن يكون صفراً  
في الحل العمومي لدالة  $(س١ + هـ)$

ولا يستحيل فرض هذا المكرر غير محدود لأنه حين يكون الطرف  
الثاني لمعادلة  $(١٣٣)$  غير محدود يكون الطرف الأول كذلك  
يعني أنه يكون  $د = (س١ + هـ) = \infty$  وحيث أن  $د = (س١ + هـ)$   
تتركب من  $س١ + هـ$  كما تتركب دسمة من  $س١$  فالحد الداخل  
في  $د = (س١ + هـ)$  الذي يجعلها غير محدودة يجعل ايضاً دسمة غير محدودة  
ومثاله أنه إذا كانت  $د = (س١ + هـ)$  تحتوي على حد غير محدود وليكن  
 $س١ + هـ = \frac{ل}{س٢ - س١}$  يقتضي أن تكون دسمة محتوية ايضاً على حد  
 $س١ - س٢$  يكون غير محدود كذلك وينتج من ذلك أن الدالة المفروضة تكون  
غير محدودة ولا يفرض ذلك

\* ٢٥٢ \* كميات دسمة و دسمة و دسمة والخ  
هي التي سماها لاجرائج الدالة الأولى والدالة الثانية والدالة الثالثة والخ  
لدالة س١ وعلى العموم نسمي بالدوال المشتقة وقد بين لاجرائج المذكور  
ايضاً الدوال المشتقة بوجه آخر بإبدال  $\frac{س١}{س٢}$  بـ  $س١$  و  $\frac{س١}{س٢}$  بـ  $س١$

بـ  $س١$  و  $\frac{س١}{س٢}$  بـ  $س١$  وهلم جرا

• (في الحالات التي يختلف فيها قانون تيلور) •

\* ٢٥٣ \* عموماً متى توضع س١ + هـ محل س١ في دالة  
لتغير س١ فإن صورة هذه الدالة تبقى متحدة حيث أن س١ + هـ تدخل





٥٦٩٨

وذلك يكتفي بتعيين المكررات  $ح$  و  $ع$  و  $خ$  لمعادلة (١٤٢)  
هذا ومن بعد النظر في معادلات (١٤٤) و (١٤٥) يعلم ان  
تنقص واحدا في كل مرة فعل التفاضل ومتى انتهى الى التفاضل النوني يوجد

$$\frac{٥}{٦} د (٦+هـ) = ٥ د هـ - ٥ د ح + ٥ د ع + ٥ د خ = ٥ د هـ - ٥ د ح + ٥ د ع + ٥ د خ + ٥ د خ$$

ونجد لاجل التفاضل الآتي بعد

$$\frac{٥}{٦} د (٦+هـ) = ٥ د هـ - ٥ د ح + ٥ د ع + ٥ د خ$$

وحيث كان  $\frac{١}{٥}$  أقل من الواحد فكمية  $\frac{١}{٥} - ١$  تدل على عدد سالب  
ويمكن حينئذ كتابة المعادلة السابقة هكذا

$$\frac{٥}{٦} د (٦+هـ) = \frac{٥}{٦} د (٦+هـ) - \frac{٥}{٦} د (١-٥)$$

وعلى موجب ذلك متى يجعل  $هـ = ٠$  لاجل تعيين مكرر احد حدود  
معادلة (١٤٢) يوجد

$$\infty = \frac{٥}{٦} د (٦) = \frac{٥}{٦} د (٦)$$

ويكون كذلك متى يراد تعيين المكررات التفاضلية بدرجة عليا وينج  
من هذه القضية انه متى يجعل  $هـ = ٦$  في حل  $د (٦+هـ)$  (هـ + ٦)  
ان وجدت قوة كسرية لكمية هـ في هذا الحل وكانت محصورة بين الحدود

المتبوعة بكميتي  $هـ$  و  $هـ$  فلا يمكن تعيين حدود منسلسلة تيلور الا الى

درجة  $h$  وهو اى الحد الذى درجته  $h$  من ضمنها وجميع الحدود  
الانترصير غير محدودة

\* ٢٥٦ \* القروض دالة لتغير  $m$  متينة برمز  $D_m$   
ويراد تعيين حل  $D$  ( $m+h$ ) فى حالة فرضية  $m = 0$  ولذلك  
يلزم كما تبين ان نحسب حدود متسلسلة

$$D_m + \frac{D_m^2}{2!} + \frac{D_m^3}{3!} + \dots + \frac{D_m^r}{r!} + \dots$$

ولكن اذا صار يعمل هذا الحساب احد المكررات التفاضلية غير محدود فى حال  
فرضية  $m = 0$  فلا يبحث عن حل  $D$  ( $m+h$ ) بتسلسلة تبلور  
وهامى الطريقة اللازم استعمالها

بوضع  $m + h$  محل  $m$  فى  $D_m$  فحينئذ يحوى الحد الذى كان  
يشتمل على  $m-h$  فى المقام على  $m-h$  ولا يصير غير محدود  
متى نجعل  $m=0$  لكنه يتشأنه حد متبوع بقوة كسرية لكمية  $h$   
\* ٢٥٧ \* وليكن مثلاً

$$D_m = \sqrt{m^2 - 1} + m^2 - m^2$$

فباخذ التفاضل يوجد

$$\frac{D_m}{\sqrt{m^2 - 1}} + (m-1) = \frac{D_m}{\sqrt{m^2 - 1}}$$

وبوضع هذه المقادير ومقادير  $\frac{D_m^2}{2!}$  و  $\frac{D_m^3}{3!}$  و الخ

فى قانون تبلور بيند (٥٥) يوجد

$$D(m+h) = \sqrt{m^2 - 1} + (m-1) + \frac{D_m^2}{2!} + \frac{D_m^3}{3!} + \dots + \frac{D_m^r}{r!} + \dots$$

وحيث ان الحد المصروب فى  $h$  يصير غير محدود متى نجعل  $m = 0$

فهذا

فهذا الحل يكون غير ممكن

وفي هذه الحالة يوضع من بعد القاعدة السابقة  $هـ + هـ$  محل  $هـ$

في معادلة  $د هـ = ٧٢ هـ - ٢ هـ + ٧ هـ - ٢ هـ$  فيوجد

$$د (هـ + هـ) = (٧٢ هـ - ٢ هـ + ٧ هـ - ٢ هـ) + (٧٢ هـ - ٢ هـ + ٧ هـ - ٢ هـ)$$

وهذه المعادلة تصبح  $هـ = ٧$

$$د (هـ + هـ) = (٧٢ هـ - ٢ هـ + ٧ هـ - ٢ هـ) \text{ أو } د (هـ + هـ) = (٧٢ هـ - ٢ هـ + ٧ هـ - ٢ هـ)$$

$$د (هـ + هـ) = (٧٢ هـ - ٢ هـ + ٧ هـ - ٢ هـ)$$

ونحل بقانون الكمية ذات الحدين الجذر الداخل في هذه المعادلة ونرمز لاجل

الاختصار للمكررات التي تحدث بذلك القانون برموز  $ع$  و  $ح$  و  $خ$  و  $ج$

فيوجد

$$٧ (هـ + هـ) = (٧٢ هـ - ٢ هـ + ٧ هـ - ٢ هـ) + (٧٢ هـ - ٢ هـ + ٧ هـ - ٢ هـ)$$

ونضع هذا المقدار في المعادلة الأخيرة فنصير

$$د (هـ + هـ) = (٧٢ هـ - ٢ هـ + ٧ هـ - ٢ هـ) + (٧٢ هـ - ٢ هـ + ٧ هـ - ٢ هـ)$$

ويشاهد من هذا المثال انه بوضع  $هـ + هـ$  في الدالة وجعل  $هـ = ٧$

يمكن ادخال قوة او جلة قوى كسرية لكمية  $هـ$  ونحل بعد ذلك بالاتفاق

الحدود القابلة لان تكون كذلك سواء كان قانون الكمية ذات الحدين

او بخلافه ونوضع هذه الحدود في مقدار  $د (هـ + هـ)$  فيوجد الحل المطلوب

• ٢٥٨ • وقد اثبت لاجرائنا ان حل  $د (هـ + هـ)$  لا يمكن أن يتجوى على

حدود متبوعة بقوة كسرية الى  $هـ$  متى كانت  $هـ$  باقية غير معينة

وذلك يفرض  $د (هـ + هـ) = ٧٢ هـ - ٢ هـ + ٧ هـ - ٢ هـ + ٧٢ هـ - ٢ هـ + ٧ هـ - ٢ هـ$

وحيث كان  $٧٢ هـ - ٢ هـ + ٧ هـ - ٢ هـ$  يقبل ثلاث مقادير ولكن  $م$  و  $ن$  و  $ج$

توجد هذه الحلول الثلاث الدالة  $(هـ + هـ)$

$$د(س+ه) = دس + ه + ك_ه + ..... م$$

$$د(س+ه) = دس + ه + ك_ه + ..... د$$

$$د(س+ه) = دس + ه + ك_ه + ..... ح$$

لكن دس ينبغي أن تحتوي على جذور واحدة كدالة (س + ه)  
كافي بند (٢٥٣) فيلزم أن يكون لدالة س ايضا ثلاث مقادير مختلفة  
ك و س و و وبوضع هذه المقادير على التوالي محل دس يوجد حينئذ

$$د(س+ه) = دس + ه + ك = ..... م$$

$$د(س+ه) = دس + ه + ك = ..... د$$

$$د(س+ه) = دس + ه + ك = ..... ح$$

$$د(س+ه) = دس + ه + س = ..... م$$

$$د(س+ه) = دس + ه + س = ..... د$$

$$د(س+ه) = دس + ه + س = ..... ح$$

$$د(س+ه) = دس + ه + و = ..... م$$

$$د(س+ه) = دس + ه + و = ..... د$$

$$د(س+ه) = دس + ه + و = ..... ح$$

واذن توجد لدالة (س+ه) بجهاها تسع مقادير مختلفة بخلافها غير  
محولة فانه لا يوجد لها الا بقدر ما لدالة س من المقادير وعلى ذلك يكون لها  
ثلاثة في الحالة الاتية وحينئذ لا يمكن أن يفرض ان حل د(س+ه)  
يحتوى على أس كسرى لكمية ه من غير الوقوع في المناقضة

\* ٢٥٩ \* ونسهل البرهنة ايضا على ان د(س+ه) لا يمكن  
أن تستعمل في حلها على حد متبوع بأس سلبى لكمية ه لانها اذا كانت  
تحتوى على حد كحد م ه يوجد

$$د(س+ه) = دس + ه + ك_ه + ..... \frac{م}{د}$$

ويجعل

• (١٩٢) •

ويجعل هـ = ٠ يتغير الطرف الأول بدالة سـ والطرف الثاني  
عوضا عن ايلوته الى دسـ بصير غير محدود بسبب حـه  $\frac{ك}{د}$  الذي  
يحتوى عليه

• ٢٦٠ • ويكون كذلك متى كان الحل مشتملا على حـه متبوع  
بلوغاريتم هـ لانه اذا وجد مثلا حـه ع لوغا هـ فان هذا الحد  
يصير ع لوغا ٠ متى يجعل هـ = ٠ وبسبب كون لوغاريتم الصفر  
غير محدود بالسلب يكون حـه ع لوغا هـ حينئذ غير محدود ويلزم من  
ذلك أن تكون دسـ كذلك غير محدودة وهذا يخالف الفرض

اتهى حساب التفاضل

وتم





$$\frac{ع}{س} = \frac{و لو غا س}{و س}$$

ومن ثم يكون تفاضل لو غا س هكذا ع  $\frac{و س}{و لو غا س}$  ويتظر ان ثابتة ع ليست

الا القياس

• الملاحظة الثانية (بند ٢٤٥) •

على القاعدة الاساسية لطريقة المـكـتـرـرات الغير المتعينة  
يمكن الاثبات بالوجه الآتى على انه متى تكون المعادلة التى كعادلة

$$ع س + ح س + د س + هـ س + و س = ٠ \quad (٢) \text{ مثلا}$$

منتحقة مهما كانت س يلزم أن يكون كل من المـكـتـرـرات ع و ح و د و هـ و و  
صفرا لانه حيث كانت س تقبل اى مقدار كان يمكن وضع س = ١٠  
وتؤول معادلة (٢) حينئذ الى ٠ = ٠

ولما كانت و غير معلقة بمتغير س فتكون صفرا ايضا متى لا تكون س  
صفرا وينتج من ذلك ان معادلة (٢) تختصر الى هذه

$$ع س + ح س + د س + هـ س = ٠$$

وبإسقاط المضروب المشترك س يبقى

$$ع س + ح س + د س + هـ س = ٠$$

ثم نطبق ما ذكر بخصوص معادلة (٢) على هذه المعادلة فينتضح لنا ان  
تكون صفرا وبالدأومة هكذا يظهر على التعاقب كون المـكـتـرـرات الاخر  
تكون كذلك

• (فى المفردات الماثلة للامير) •

فى البحث عن منحنيات الانعكاس المستوية المـمـمـة كوسينيك  
الملف المشترك لجميع الخطوط العمودية على خط منحنى مستو هو المستنى  
مفرد هذا المنحنى ونقطة تماس هذا الملف بكل عمود يقال لها مركز

الانحناء

الاختلاف في النقطة المطابقة لها من المنحنى المقروض والمستقيم الموصل لهاتين  
النقطتين يقال له نصف قطر الاختلاف في النقطة نفسها  
وبالمناسبة يقال للملف الذي يحدث من تقاطع الخطوط المستقيمة الممتدة  
من جميع نقط المنحنى المقروض جاعلة بين عمده في النقط بعينها زوايا ثابتة  
أو متغيرة بحسب شرط ما ريانى مفرودا مائلا للمنحنى المقروض ويمكن  
أن يقال لنقط تماس هذا الملف المستجد بكل من الخطوط المستقيمة الحادث هو  
منها مراكز الاختلاف المائلة في النقط المطابقة لها من المنحنى الاصلى وبالجملة  
يمكن أن يقال للمستقيم الموصل لهاتين النقطتين نصف قطر الاختلاف المائل  
لهذا المنحنى في النقطة المذكورة

فاذا كان المنحنى المقروض دائرة مثلا وكانت الزوايا التي تجعلها انصاف أقطار  
الاختلاف المائلة مع انصاف أقطار الاختلاف الاعتيادية أو العمودية ثابتة  
فالمفرد المائل يكون لامحالة دائرة متحددة المركز مع الاولى ولاجل  
أن يكون المفرد المائل في الحالة بعينها بثبوت الزاوية نقطة يجب أن يكون  
المنحنى المقروض حلزونيا لو غاربتيا وإذا آل هذا المنحنى المقروض الى خط  
مستقيم وكانت الزوايا تزداد بنسبة بعد الاعمدة عن نقطة ثابتة عليه  
فالمفرد المائل يكون عين المفرد العمودى للسكويدي واذن يكون هذا  
المفرد سكويديا وهلم جرا

القضية العامة للمفردات المائلة التي يترأ عدم وقوف المهندسين عليها  
والتي يمكن تحصيلها بمبحث آخر تؤول بغاية ما يكون من السهولة الى جملة نواتج  
غريبة لا تستخرج عادة بواسطة الطرق المعتادة الا بوجه شاق ولنقتصر  
على تبين القوانين الاصلية التي تربط المفردات المائلة بالمفردات العمودية  
ونجربى عملها على مثال خاص بعلم الضوء فنقول

لتكن موم (شكل اثناني) نقطتان من منحنى مفروض و و ح النقطتان  
المطابقتان لهاتين النقطتين من مفروده العمودى وتلك النقطتان يعنى  
و و ح يكونان مراكز الاختلاف في نقطتي موم وليكن ا و ا مراكز

الاثنا المطابقة لاحد مفردات هذا النحنى المائلة وليكن و تقاطع  
 د م و ا م هذا وتجعل نقطة م مركزا ويعد ه ا عن نقطة م يرسم  
 قوسا من دائرة ينتهى في ا على امتداد ا م ثم يرسم برمز قو للقرص  
 من النحنى م م العدود من م نحو م وبرمز قو للقرص من النحنى  
 ا م المحسوب من ا نحو ا وبرمز نق لنصف قطر الاثنا العمودى  
 د م وبرمز نق لنصف قطر الاثنا المائل ا م وبرمز ب لزاوية د م ا  
 الواقعة بين نصفي قطري الاثنا هذين وبرمز ع لذي الاربعة اضلاع  
 المحدود بخطوط مستقيمة ومنحنية م د م وبرمز ع لذي الاربعة  
 اضلاع م ا ا م

فإذا فرضنا نقطة مَ قرية جتاً من نقطة م فقط و ا تكون كذلك قرية جتاً من النقطة و ا واقواس و و ا يمكن اعتبارها كالامتدادات المستقيمة لخطي م و و م ا على الولا ومساحات م و و م ا و م ا م يمكن اعتبارها ايضاً كقطاعات بسيطة او كثلثات كذلك وما كنط عمودي على ا م او على ا م فيوجد في هذه الحالة

۴۴ = وَاوُ , ۴۵ = وَاوُ , ۴۶ = وَاوُ

م = ن + و + ا + ن = ن + و + ا + ن وزاوية م = ب + و + ب  
ثم بعد ذلك وجد أن

۱ = مَ جتاب = وقو جتاب و ۱ = مَ جاب = وقو جاب  
ولکن

$$1' + 2'' = 1'' = 2' = 1'' + 2'$$

فیوجد بالوضع حیثی

تق

\* (199) \*

$$\text{نق} + \text{واقو} = \text{نق} + \text{واق} + \text{نق} + \text{واق} + \text{نق} + \text{واق} + \text{نق} + \text{واق}$$

۱) ..... + جاب و اتق = و اتق (۱)

ويوجد أيضا

$$\frac{\text{زاویه م } 7 = \text{و } 2}{\text{نق} + \text{واقو}} = \frac{\text{واقو}}{\text{زاویه م } 2 = \text{و } 1} = \frac{1}{\text{نق} + \text{واقو}}$$

ولكن بسبب تساوى زاويتى مثلثى  $MO_1$  و  $MO_2$  التمييزى و يوجد

$$\text{زاوية } \omega_2 + \text{زاوية } \omega_1 = \text{زاوية } \omega_3 + \text{زاوية } \omega_4$$

واذن يكون بالاستبدال

$$ب + \frac{واقو}{تی + واقو} = (ب + واقو) + \frac{واقو}{تی + واقو} \text{ و باسقاط}$$

المشترك من الطرفين يكون

$\frac{قو}{ق + و} = \frac{اب}{ب + ق} + \frac{وقجتاب}{ق + و}$  وبحذف المقامات يكون

(نق + واقو) واقو = (نق + واق) (نق + واقو) اب + (نق + واق) واقو جناب.

وبجمل هذه الضروب واسقاط الحدود المشتملة على التفاضلات بدرجات

دون الواحد وقسمة جميع الحدود على (١) فو يحدث

$$(f) \dots\dots\dots = \frac{\text{واب}}{\text{واقو}} - \frac{\text{نق}}{\text{نق حجاب}}$$

و يوجد أخيراً

قطاع م د م =  $\frac{1}{r} \times \frac{1}{r} \times \frac{1}{r}$  و قطاع م أ م =  $\frac{1}{r} \times \frac{1}{r} \times \frac{1}{r}$  بقدر

$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} (ق + و) = \frac{1}{4} (ق + و) = \frac{1}{4} (ق + و) = \frac{1}{4} (ق + و)$   
وباسقاط الحدود المشتملة على القوى الثانية للتفاضلات يكون

$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} (ق + و) = \frac{1}{4} (ق + و) = \frac{1}{4} (ق + و) = \frac{1}{4} (ق + و)$

وهذه القوانين الاربع الصعبة الایجاد بواسطة الطرق الاعتيادية الهندسية الحسائية تطابق للشكل كما هو مشروح رسمه ولكن يتيسر في جميع الحالات أن تغير فيها العلامات التي تستدعي احوالا خصوصية يمكن ايجادها فيها

و يوجد لاجل المفرودين المائلين لثمن واحد مفروض جلتان من المعادلات المتماثلة يعنى انه بالتأشير بالعلامات على الصور المتعلقة بالمفرودين الثاني المائل نجد بين القوانين الاخر هذه الاربع معادلات

$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} (ق + و) = \frac{1}{4} (ق + و) = \frac{1}{4} (ق + و) = \frac{1}{4} (ق + و)$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} (ق + و) = \frac{1}{4} (ق + و) = \frac{1}{4} (ق + و) = \frac{1}{4} (ق + و)$

ويمكن فرض كون انصاف أقطار الانحناء لا احد الجلتين تكون الاشعة الساقطة المماس بجميعها لا احد المفرودين المائلة والمنحني المفروض يكون هو المنحني المعكس او الفارق للمآتين المتجانستين بشدة مختلفة وكون انصاف الاقطار الانحنائية المائلة للجملة الاخرى تكون هي الاشعة المنعكسة او المنكسرة عند مقابلتها هذا المنحني والمماس جميعها بالمفرودين المائل الآخر الذي يكون بهذا الوجه هو الكوستيك بالانعكاس او بالانكسار حال كونه متكونا من انصاف الاقطار هذ

ولاجل ذلك يلزمنا بحسب قواعد الضوء أن نربط معادلة  $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} (ق + و)$

التي فيها رمز  $ق$  و  $و$  بينان عددين ثابتين لا يختلفان في حالة الانعكاس الخصوصية عن بعضهما الا في الاشارة بالاربع معادلات المرقومة

• (٢٠١) •

اعلاه فباخذ تفاضل معادلة (٥) يوجد

$$\text{واب جاب جتاب} - \text{واب جاب جتاب} = ٠ \text{ او}$$

$$\frac{\text{واب}}{\text{واقو}} \text{ جاب جتاب} - \frac{\text{واب}}{\text{واقو}} \text{ جاب جتاب} = ٠$$

وبوضع مقادير  $\frac{\text{واب}}{\text{واقو}}$  و  $\frac{\text{واب}}{\text{واقو}}$  المستخرجة من معادلات ٢ و (٢)

في هذه المعادلة عوضا عنها يوجد

$$\frac{\text{جاب جتاب}}{\text{نق}} - \frac{\text{جاب جتاب}}{\text{نق}} = \frac{\text{جاب جتاب}}{\text{نق}} \dots \dots (١)$$

وبواسطة هذا القانون الاخير يرسم بسهولة بواسطة النقط الكوسينيك بالانكسار المطابق لمنحن مفروض فاصل لمادتين معروف رسم نصف قطر انحنائية في اى نقطة منه وجميع الاشعة الساقطة له مماسة بمنحن مفروض ايضا ولتدل لاجل ذلك مستقيما بمماس المنحنى الاخير ونطوله حتى يصل الى نقطة تقابله بالمنحنى الفاصل ونرسم له خطا عموديا في هذه النقطة فيعلم طول نق للشعاع الساقط وتعلم زاوية السقوط ب ومن ثم نعلم زاوية ب بواسطة معادلة (٥) ويمكن حينئذ رسم جهة الشعاع المنكسر ثم يعلم بسهولة بمعادلة (٦) طول نق وتبين بهذه الكيفية نقطة من نقط الكوسينيك المبحوث عنه

واذا فرض منحن تكون جميع الاشعة الساقطة عمودية عليه عوضا عن معرفة المنحنى المماسية به جميع الاشعة الساقطة فان تلك الاشعة تكون مماسة بالمقرود العمودى لذلك المنحنى وبذلك تؤول المسئلة الى الحالة السابقة

وفي الحالة الخصوصية التى تكون فيها جميع الاشعة عمودية على محيط دائرة واحدة تمر تلك الاشعة بمركزها واذا نؤول المقرود المائل الاول الى النقطة الشعاعية ويصير نق الصورة العمومية لابعاد هذه النقطة عن جميع نقط

المحنى الفاصل

واذا وضعنا معادلة (٦) بهذه الصورة

$$\frac{\text{جـاب جـنـاب} - \text{جـاب جـنـاب}}{\text{نق}} = \frac{\text{جـاب جـنـاب}}{\text{نق}} - \frac{\text{جـاب جـنـاب}}{\text{نق}}$$

ووضع فيها مقدار جـاب المستخرج من معادلة (٥) عوضا عنه صارت تلك المعادلة منقسمة على جـاب وتؤول الى

$$\frac{\text{ب جـنـاب}}{\text{نق}} - \frac{\text{ب جـنـاب}}{\text{نق}} = \frac{\text{ب جـنـاب} - \text{ب جـنـاب}}{\text{نق}} \dots \dots (٧)$$

واذا فرضنا الآن ان زاوية السقوط تكون صفرا فمعادلة (٥) تبين ان زاوية الانكسار تكون كذلك ولذا يوجد

جـنـاب = جـنـاب = ١ وبه تؤول معادلة (٧) الى

$$(٨) \dots \dots \dots \frac{\text{ب} - \text{ب}}{\text{نق}} = \frac{\text{ب}}{\text{نق}} - \frac{\text{ب}}{\text{نق}}$$

وحينئذ متى تكون الاشعة الساقطة صادرة من نقطة واحدة فان هذه المعادلة تحدث بالسهولة التامة النقطة التي وجد على نصف القطر العمودى من الكوسينيك بالانكسار وهذه النقطة هي التي تسمى بالنقطة الاحتراقية متى يكون المحنى الفاصل دائرة

واذا فرض في حالة الدائرة ان النقطة الشعاعية تكون على بعد غير محدود فمعادلة (٨) تؤول الى

$$\frac{\text{ب}}{\text{نق}} = \frac{\text{ب} - \text{ب}}{\text{نق}} \text{ الذى يستخرج منه } \frac{\text{ب}}{\text{نق}} = \frac{\text{ب} - \text{ب}}{\text{نق}} (٩)$$

وبهذا تعرف موضع النقطة الاحتراقية للاشعة المتوازية وتسمى هذه النقطة الاحتراقية في هذه الحالة النقطة الاحتراقية الاصلية

واذا فرض في معادلة (٨) ايضا ان الخط الفاصل يصير خطا مستقيما

أوان نق يكون غير محدود آت تلك المعادلة بالاختصار إلى

$$\frac{ب}{نق} - \frac{ب}{نق} = ٠ \text{ الذي يحدث منه } \frac{نق}{نق} = \frac{ب}{ب} \cdot ٠٠٠ (١٠)$$

وحينئذ تكون أبعاد النقطة الشعاعية والنقطة الاحتراقية عن المستقيم الفاصل في هذه الحالة في نسبة معا كسة لنسبة جيب السقوط إلى جيب الانكسار

وإذا كانت الأشعة بعد انكسارها الأول في الحالة العمودية تصبح منكسرة مرة أو جملة مرات أخر بمصادمتها بمنحن أو جملة منحنيات أخر فواصل ينظر انه حيث كان يعرف قبل كل انكسار يستجد على ماذكر الكوسينيك الذي تكون الأشعة الساقطة مماسة به فيتوصل بالانتقال من كوسينيك إلى آخر بواسطة الطرق التي شرحناها إلى رسم الكوسينيك الأخير بالنقط واذن يمكن اعتبار معادلتى (٥) و (٦) كخاصيتين لان يعرف بهما بواسطة النقط الكوسينيك الناتج من انكسارات متعاقبة كيف ما يراد

ولاجل أن نقف على كيفية سهلة تنتهى لنا مثله مفيدة زيادة على ما تقدم ففرض سطحين فاصلين قطبان زمرى برمز نق بعد نقطة السقوط المستجدة عن النقطة التي يماس فيها الشعاع الثانى الساقط المفرد المائل الثانى وبرمز نق لنصف قطر الانحناء المنحنى الفاصل المستجدة في نقطة السقوط وبرمز نق لطول الشعاع المنكسر ثانياً والمحسوب من نقطة السقوط الثانية إلى نقطة تماسه بالمفرد الثالث المائل وبالجملة فبرمز ب و ب الثانية إلى نقطة تماسه بالمفرد الثانى وهو الذى فرض جيبها مناسبة إلى ف ف فيجذبنا على (٥) و (٧) هذه الأربع معادلات

•(٢٠٤)•

$$\frac{\text{جَبَّ}}{\text{جَبَّ}} = \text{ف} \text{ و } \frac{\text{جَبَّ}}{\text{جَبَّ}} = \text{ف}$$

$$\frac{\text{فَجَبَّ} - \text{فَجَبَّ}}{\text{ف}} = \frac{\text{فَجَبَّ}}{\text{ف}}$$

$$\frac{\text{فَجَبَّ} - \text{فَجَبَّ}}{\text{ف}} = \frac{\text{فَجَبَّ}}{\text{ف}}$$

وبستخرج من الاخيرتين

$$\frac{\text{فَجَبَّ}}{\text{ف}} = \frac{\text{فَجَبَّ}}{\text{ف}} + \frac{\text{فَجَبَّ}}{\text{ف}}$$

$$\frac{\text{فَجَبَّ}}{\text{ف}} = \frac{\text{فَجَبَّ}}{\text{ف}} - \frac{\text{فَجَبَّ}}{\text{ف}}$$

ولكن هنا  $\frac{\text{ف}}{\text{ف}}$  و  $\frac{\text{ف}}{\text{ف}}$  لهما جهة واحدة تشمل على تقطعي السقوط  
فاذن يكون البعدين هاتين التقطعتين الاخيرتين مساويا لجمعهما او لفرقهما  
وبالمنحرف هـ لهذا البعد يوجد حينئذ

$$\frac{\text{فَجَبَّ}}{\text{ف}} = \frac{\text{فَجَبَّ}}{\text{ف}} + \frac{\text{فَجَبَّ}}{\text{ف}} - \frac{\text{فَجَبَّ}}{\text{ف}} + \frac{\text{فَجَبَّ}}{\text{ف}} \quad (١١)$$

وهو القانون الذي يخدم باعتبار  $\frac{\text{ف}}{\text{ف}}$  فيه مجهولا لايجاد الكوسيتيك  
الذي يحدث من انكسارين متوالين بالنقط بلا واسطة من غير الاحتياج  
الى رسم الكوسيتيك المتوسط

اذا كن السطحان الفاصلان وجهين لجسم واحد شفاف يلزم أن تربط  
بمعادلة (١١) المعادلة المضاعفة هذه

جابه

$$\frac{\text{جَاب}}{\text{جَاب}} = \frac{\text{جَاب}}{\text{جَاب}} = \frac{\text{ف}}{\text{ق}} \dots\dots (١٢)$$

واذن يمكن اعتبار جلة هاتين المعادلتين كداخل في جميع قضاياء العدسات  
بأى جنس يراد تعيين نقط الاحتراق فيه من غير اهمال اعتبار سمكها كما يفعل  
في العادة

ويستخرج من معادلتى (١) و (١) بالتحويل وبالقسمة

$$\frac{\text{قو} - \text{قو}}{\text{قو} - \text{قو}} = \frac{\text{جَاب}}{\text{جَاب}} = \frac{\text{ف}}{\text{ق}} \text{ الذى يستخرج منه}$$

$$\frac{\text{قو} - \text{قو}}{\text{قو} - \text{قو}} = \frac{\text{قو} - \text{قو}}{\text{قو} - \text{قو}} \text{ ويحدث من ذلك باخذ التكامل}$$

$$\frac{\text{قو} - \text{قو}}{\text{قو} - \text{قو}} = \frac{\text{قو} - \text{قو}}{\text{قو} - \text{قو}} = \text{ث}$$

و ث هي الثابتة الحث ما تنقفت فاذا ابتدأ قوسنا قو و قو معا  
وينت الاشعة الساقطة والمنعكسة الموافقة الى مبدأهم ما برزى  
بق و بق يوجد

$$\frac{\text{قو} - \text{قو}}{\text{قو} - \text{قو}} = \frac{\text{قو} - \text{قو}}{\text{قو} - \text{قو}} \text{ الذى يستخرج منه بالاسقاط والتحويل}$$

$$\frac{\text{قو} - \text{قو}}{\text{قو} - \text{قو}} = \frac{\text{قو} - \text{قو}}{\text{قو} - \text{قو}} \dots\dots (١٣)$$

واذا طلب ما يكون المنحنى الفاصل حتى تجتمع الاشعة الصادرة من نقطة  
وتتلاقى بعد انكسارها فى نقطة اخرى يلزم وضع قو = ٠ و قو = ٠

متصير معادلة (١٣) بهذا السبب ايلة الى

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{f'} = \frac{1}{f''} = \text{ثابتة} \dots\dots (14)$$

وهذه هي المعادلة او الارتباط الكائن بين ابعاد  $f$  و  $f'$  و  $f''$  لنقط مختلفة من المنحنى المطلوب عن نقطتين ثابتتين معلومتين فينتج من ذلك بسهولة ان معادلة ذلك المنحنى باحداثيات عمودية ترتفع الى الدرجة الرابعة وانواع هذه المنحنيات كانت مسماة خطوط ابلانتيك للمعلم كنلى الذى هيا لها جملة مباحث غريبة فى مراسلانه وفى كتيبه اودفاته الخاصة وجميع ما ذكر يطبق بلا واسطة على الانعكاس بفرض  $b' = -b$  فقط الذى ينتج منه

$$ج\text{ب} = -ج\text{ا} \text{ و ج\text{ا}ب} = ج\text{ا} \text{ و ف} = -ف$$

وحينئذ متى كانت الاشعة الساقطة مماسة بكليتها للمنحنى واحد ورمزنا برمز  $f$  لطول الشعاع العاطق المحسوب من ابتدا هذا المنحنى الى نقطة السقوط و برمز  $f'$  لطول الشعاع المنعكس المحسوب من ابتدا نقطة السقوط الى الكوسيتيك ورمزنا اخيرا برمز  $f''$  لنصف قطر الانحناء للمنحنى المعكس فى نقط السقوط توجد معادلة (٦) هكذا

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{f'} = \frac{1}{f''} \dots\dots (15)$$

وهو قانون سهل لا جل رسم الكوسيتيك بالانعكاس بواسطة النقط متى يعلم المنحنى المعكس والمنحنى الذى تماسه الاشعة الساقطة وترجع الى هذه المسئلة المسئلة التى يعلم فيها منحنى جميع الاشعة الساقطة عمودية عليه واذا اعتبرنا الشعاع الساقط العمودى على المنحنى المعكس بمجده توجد معادلة (٨) هكذا

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{f'} = \frac{1}{f''} \dots\dots\dots (16)$$

وبذلك

وبذلك تتعين النقطة الاحترافية في المرايات الدائرية واذا أريد النقطة الاحترافية الاصلية او النقطة الاحترافية للاشعة المتوازية توجد معادلة (٩)

$$ق_1 = ق_2 \dots\dots (١٧)$$

واذا صار الخط المعكس مستقيما وكانت النقطة الشعاعية حيث ما اتفقت حدث

$$ق_1 = - ق_2 \dots\dots (١٨)$$

وبالجملة فيتوصل بواسطة معادلة (١٥) الى تعيين جهة الكوسنيك الذي يحدث من عدد انعكاسات متوالية حيث ما اتفق بدون الاحتياج الى رسم الكوسنيكات المتوسطة واتما من قبل الخط الايلايتيك بالانعكاس فانه يكون معلوما (١٤) بمعادلة

$$ق_1 + ق_2 = ثابتة$$

يعنى ان هذا الخط يكون قطعاً ناقصاً او قطعاً زائداً بحسب كون  $ق_1$  و  $ق_2$  متحدة في الاشارة او مختلفة فيها وعلى ذلك يكون قطعاً مكافئاً متى كانت احدى النقطتين الثابتتين بعيدة للغاية والنهاية

اذا فرض  $ق_1$  ثابتاً في قوانين (٦) و (٧) ووضع  $ق_2 = 0$  فيها فان هذه القوانين تدخل وتنحصر في قوانين المعلم پونيت المشهورة في مراسلته للمعلم هاشيت في شأن الحالة التي يكون فيها المنحنى المعكس او الفاصل دائرة والاشعة الساقطة صادرة من نقطة واحدة ولكن يرى هنا كذلك ان تكون هذه القوانين لها مدلولات متسعة .

ومن العجايب ان پونيت لم يفكر في شرحها وبسطها على ما ينبغي فانه كان يمكنه أن يعتبر في الحقيقة انه متى تنعكس او تنكسر الاشعة الساقطة المماسية بمنحنى ما بمقابلتها منحنى آخر حيث ما اتفق يمكن نظراً احد هذه الاشعة كصادر من

نقطة تماسه بالأول من هذين المصنفين نقطة سقوطه  $\hat{P}$  إحدى نقطتي الدائرة  
الالتصافية للمصنف الثاني بمعنى أن القوائين المتشككة لأجل الدائرة  
ولأجل الأشعة الساقطة من نقطة واحدة لا تزال موجودة أيضا بإبدال  
نصف قطر الدائرة بنصف قطر الانحناء في نقطة السقوط للمصنف الذي هي  
الدائرة الالتصافية له وإبدال بعد نقطة السقوط عن النقطة الشعاعية بعد  
نقطة السقوط هذه عن نقطة تماس الشعاع الآتي إليها بالمصنف المحيط بجميع  
الأشعة الساقطة وبغاية الضبط ينتقل من قضية التحرك في الدائرة في علم  
الميكانيكا إلى قضية التحرك بطول منحنى ما بالوجه المشروح عنه

اتسعى

المهندسون الأولون الذين اشتغلوا  
بقضية الكوسينيات لم يصيبوا  
في ظنهم حيث تخيل أهم إمكان  
إبدال المصنف العكس أو الفاصل  
بالمماس له في نقطة السقوط وإنما  
سعى مطابقة قوائين لا سيرا بقوائين  
تؤتي جواز إبدال هذا المصنف  
بدائره الالتصافية في نقطة  
السقوط









